01. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන් , සියලු $n \in Z^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r^3 = \frac{1}{4} n^2 (n+1)^2$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට , ව: පැ: $= 1^3 = 1$ හා ද: පැ: $= \frac{1}{4} \cdot 1^2 (1+1)^2 = 1$ 05

$\therefore$ $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ.

ඕනෑම $p \in Z^+$ ගෙන $n=p$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි සිතමු.

එනම් , $\sum_{r=1}^{p} r^3 = \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2$ 05

දැන් $\sum_{r=1}^{p+1} r^3 = \sum_{r=1}^{p} r^3 + (p+1)^3$ 05

$$= \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2 + (p+1)^3$$

$$= (p+1)^2 \frac{\left[p^2+4p+4\right]}{4}$$

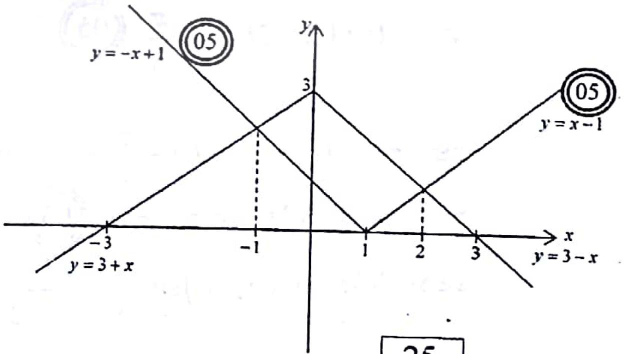
$$= \frac{1}{4} (p+1)^2 \left(\overline{p+1}+1\right)^2$$ 05

එනයින් $n=p$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම් , $n=p+1$ සඳහා ද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. අපි දැනටමත් $n=1$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව පෙන්වා ඇත. එනයින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් සියලු $n \in Z^+$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 05

25

02. එකම රූප සටහනක $y = 3 - |x|$ හා $y = |x-1|$ හි ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් අඳින්න. ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $|x| + |x-1| \le 3$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු ම තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

ඡේදන ලක්ෂ්‍යවලදී $-x+1 = 3+x$ හෝ
$x-1 = 3-x$ 05
එනම් $x-1$ හෝ $x=2$
තව ද $|x| + |x-1| \le 3$ 05
$\Leftrightarrow$ $|x-1| \le 3 - |x|$
එනයින් , ප්‍රස්තාරයෙන් , 05
විසඳුම් $-1 \le x \le 2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.



25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$|x| + |x-1| \le 3$

(i) අවස්ථාව $x \le 0$: $|x| + |x-1| \le 3 \Leftrightarrow -x - (x-1) \le 3$ 05

$\Leftrightarrow$ $-2x+1 \le 3$

$\Leftrightarrow$ $x \ge -1$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $-1 \le x \le 0$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $0 < x \leq 1$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad x - (x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad x - (x-1) \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad 1 \leq 3$

මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $0 < x \leq 1$ වේ. 05

(iii) අවස්ථාව $1 < x$

$|x| + |x-1| \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad x + x - 1 \leq 3$

$\Leftrightarrow \quad 2x \leq 4$

$\Leftrightarrow \quad x \leq 2$

$\therefore$ මෙම අවස්ථාව සඳහා විසඳුම් $1 < x \leq 2$ වේ.

එනයින් විසඳුම් $-1 \leq x \leq 2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

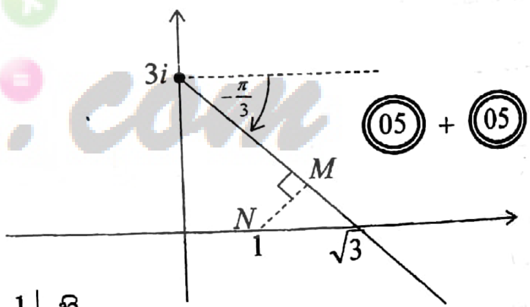
03. ආගන්ඩ් සටහනක $Arg\left(z - 3i\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍යවල පථයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

ඒනයින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ $Arg\left(\bar{z} + 3i\right) = \dfrac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි අවම අගය සොයන්න.

$Arg\left(\bar{z} + 3i\right) = \dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \quad Arg\left(\overline{\bar{z} + 3i}\right) = \dfrac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \quad Arg\left(z - 3i\right) = -\dfrac{\pi}{3}$ 05



05 + 05

එනයින් $Arg\left(\bar{z} + 3i\right) = \dfrac{\pi}{3}$ වන පරිදි $|z-1|$ හි

අවම අගය NM දෙනු ලබයි. 05

මෙහි $NM = \left(\sqrt{3} - 1\right)\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\left(3 - \sqrt{3}\right)}{2}$ 05

25

04. $\left(x^2 + \dfrac{3k}{x}\right)^8$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයේ x හා x^4 හි සංගුණක සමාන වේ. k නියතයෙහි අගය සොයන්න.

$\left(x^2 + \dfrac{3k}{x}\right)^8 = \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r \left(x^2\right)^r \left(\dfrac{3k}{x}\right)^{8-r}$ 05

$= \sum_{r=0}^{8} {}^8C_r \left(3k\right)^{8-r} x^{3r-8}$

$x^1 : 3r - 8 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r = 3$ 05

$x^4 : 3r-8=4 \Leftrightarrow r=4$

දත්තයෙන් ${}^8C_3\,(3k)^5 = {}^8C_4\,(3k)^4$ 05

$\frac{8!}{3!5!}(3)^5 k = \frac{8!}{4!4!}3^4$ 05

$k = \frac{5}{12}$ 05

25

05. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \frac{\pi^2}{32}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{x^2(x+1)} \quad 05$$

$$= \lim_{x\to 0} 2\left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{8}\right)}{\left(\frac{\pi x}{8}\right)}\right]^2 \cdot \frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{1}{x+1} \quad 05$$

$$= 2\cdot 1\cdot\frac{\pi^2}{64}\cdot\frac{1}{1} \quad 05 \quad 05$$

$$= \frac{\pi^2}{32} \quad 05$$

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)} = \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)}\cdot\frac{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{x^2(x+1)\left(1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)\right)} \quad 05$$

$$= \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{\left(\frac{\pi x}{4}\right)}\right]^2 \cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{x+1}\cdot\frac{1}{1+\cos\left(\frac{\pi x}{4}\right)} \quad 05$$

$$= 1\cdot\frac{\pi^2}{16}\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} \quad 05 \quad 05$$

$$= \frac{\pi^2}{32} \quad 05$$

25

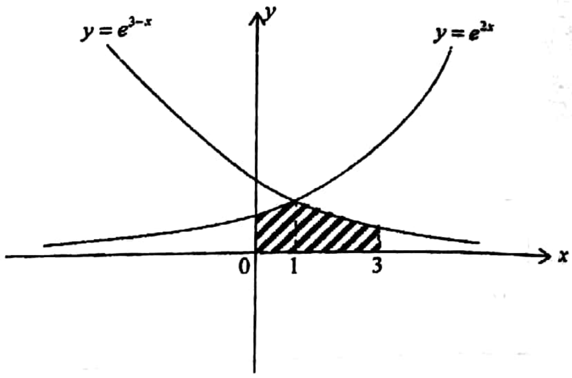
06. $y=e^{2x}$, $y=e^{3-x}$, $x=0$, $x=3$ හා $y=0$ වක්‍ර මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය , වර්ග ඒකක $\frac{3}{2}\left(e^2-1\right)$ බව පෙන්වන්න.

$$\int_0^1 e^{2x}dx+\int_1^3 e^{3-x}dx=\left.\frac{e^{2x}}{2}\right|_0^1+\left.\frac{e^{3-x}}{(-1)}\right|_1^3 \quad 05 \quad 05 \quad 05$$

$$=\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}+(-1)+e^2 \quad 05$$

$$=\frac{3e^2}{2}-\frac{3}{2}$$

$$=\frac{3}{2}\left(e^2-1\right) \quad 05$$



25

07. $\frac{\pi}{2}<t<\pi$ සඳහා $x=\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right)$ හා $y=\sin t$ පරාමිතික සමීකරණ මගින් C වක්‍රයක් දෙනු ලැබේ. $\frac{dy}{dx}=\cos t\sin t$ බව පෙන්වන්න.

$t=\frac{2\pi}{3}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී C වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශ රේඛාවෙහි අනුක්‍රමණය $-\frac{\sqrt{3}}{4}$ බව අපෝහනය කරන්න.

$$x=\ln\left(\tan\frac{t}{2}\right) \qquad y=\sin t$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{1}{\tan\frac{t}{2}}\times\sec^2\frac{t}{2}\times\frac{1}{2} \quad 05 \qquad \frac{dy}{dt}=\cos t \quad 05$$

$$=\frac{1}{2\cos\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}} \quad 05$$

$$=\frac{1}{\sin t}$$

දැන් $$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\cos t\sin t \quad 05$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{2\pi}{3}}=\cos\frac{2\pi}{3}\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{4} \quad 05$$

25

08. l_1 යනු $x+y-5=0$ සරල රේඛාව යැයි ගනිමු. $P\equiv(3\ ,\ 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන හා l_1 ට ලම්බ වූ l_2 සරල රේඛාවෙහි සමීකරණය සොයන්න.

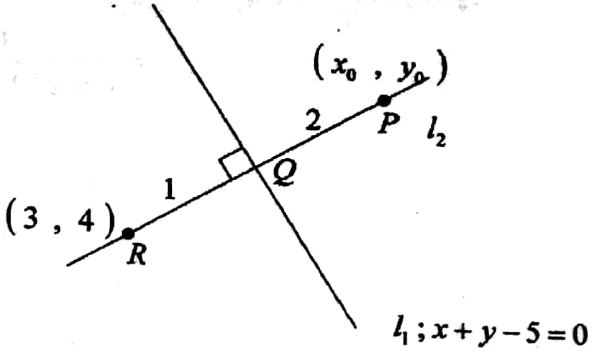
Q යනු l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය යැයි ද R යනු $PQ:QR=1:2$ වන පරිදි l_2 මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. R හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

l_2 හි අනුක්‍රමණය $= -\dfrac{1}{-1} = 1$ (05)

l_2 සමීකරණය : $y-4=1(x-3)$

$x-y+1=0$ (05)

$Q\equiv(2\ ,\ 3)$ (05)



$R\equiv(x_0\ ,\ y_0)$ යයි ගනිමු.
එවිට

$2=\dfrac{x_0+6}{3}$ සහ $3=\dfrac{y_0+8}{3}$ (05)

$\therefore\ x_0=0$ සහ $y_0=1$

$\therefore\ R\equiv(0\ ,\ 1)$ (05)

වෙනත් ක්‍රමයක්

$\dfrac{QR}{RP}=-\dfrac{2}{3}$ බැවින්

$R\equiv\left(\dfrac{-2\times3+2\times3}{3-2}\ ,\ \dfrac{-2\times4+3\times3}{3-2}\right)$ (05)

$=(0\ ,\ 1)$ (05)

25

09. $P\equiv(1\ ,\ 2)$ හා $Q\equiv(7\ ,\ 10)$ යැයි ගනිමු. P හා Q ලක්ෂ්‍ය විෂ්කම්භයක අන්ත ලෙස වූ වෘත්තයෙහි සමීකරණය $S\equiv(x-1)(x-a)+(y-2)(y-b)=0$ වන පරිදි a හා b නියතවල අගයන් ලියා දක්වන්න.

$S'\equiv S+\lambda(4x-3y+2)=0$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\lambda\in R$ වේ. P හා Q ලක්ෂ්‍ය $S'=0$ වෘත්තය මත පිහිටන බව පෙන්වා, මෙම වෘත්තය $R\equiv(1\ ,\ 4)$ ලක්ෂ්‍යය හරහා යන පරිදි λ හි අගය සොයන්න.

$a=7$
$b=10$ (05)

$P\equiv(1\ ,\ 2)$ සහ $Q\equiv(7\ ,\ 10)$ යන දෙකම $s=0$ සහ $4x-3y+2=0$ යන දෙකම තෘප්ත කරන බැවින් $s'=0$ වේ. (05) (05)

$\therefore\ P$ සහ Q ලක්ෂ්‍ය $s'=0$ මත පිහිටයි.

$s'=0$ යන්න $R\equiv(1\ ,\ 4)$ හරහා යයි නම්,

$0+(4-2)\times(4-10)+\lambda(4-12+2)=0$ වේ. (05)

$6\lambda=-12$

$\lambda=-2$ (05)

25

10. $x\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}$ සඳහා $\sec^3 x+2\sec^2 x\tan x+\sec x\tan^2 x=\dfrac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $n\in z$ වේ.

$\sec^3 x+2\sec^2 x\tan x+\sec x\tan^2 x$

$=\dfrac{1}{\cos^3 x}+\dfrac{2\sin x}{\cos^3 x}+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^3 x}$ (05)

$=\dfrac{1+2\sin x+\sin^2 x}{\cos^3 x}$

$=\dfrac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin^2 x)}$ (05)

$$= \frac{(1+\sin x)^2}{\cos x(1-\sin x)(1+\sin x)}$$ 05 $\because$ $n \in z$ සඳහා $x \neq (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$$= \frac{(1+\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

$$= \frac{1-\sin^2 x}{\cos x(1-\sin x)^2}$$ 05

$$= \frac{\cos x}{(1-\sin x)^2}$$ 05

25

---

11. (a) a , $b \in R$ යැයි ගනිමු. $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$ සමීකරණයේ විවේචකය a හා b ඇසුරෙන් ලියා දක්වා **ඒනයින්** මෙම සමීකරණයේ මූල තාත්ත්වික බව පෙන්වන්න.
මෙම මූල α හා β යැයි ගනිමු. a හා b ඇසුරෙන් $\alpha + \beta$ හා $\alpha\beta$ ලියා දක්වන්න.
දැන් $\beta = \alpha + 2$ යැයි ගනිමු. $a^2 - ab + b^2 = 9$ බව පෙන්වා
$|a| \leq \sqrt{12}$ බව **අපෝහනය** කර a ඇසුරෙන් b සොයන්න.

(b) $c(\neq 0)$ හා d තාත්ත්වික සංඛ්‍යා යැයි ද $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$ යැයි ද ගනිමු. $(x+c)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය $-c^3$ වේ. තව ද $(x-c)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ. $c = -2$ හා $d = -12$ බව පෙන්වන්න. c හා d හි මෙම අගයන් සඳහා $(x^2 - 4)$ මගින් $f(x)$ බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(a) $3x^2 - 2(a+b)x + ab = 0$

විවේචකය $\Delta = 4(a+b)^2 - 12(ab)$

$$= 4(a^2 + 2ab + b^2 - 3ab)$$ 10

$$= 4(a^2 - ab + b^2)$$

$$= 4\left[\left(a - \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{3b^2}{4}\right] \geq 0 \text{ for all } a, b \in R$$ 05 05

ඒ නයින් , මූල තාත්ත්වික වේ. 05

$\alpha + \beta = \frac{2}{3}(a+b)$ 05 $\alpha\beta = \frac{ab}{3}$ 05

$\beta = \alpha + 2 \Rightarrow (\beta - \alpha)^2 = 4$ 05

$\Rightarrow (\beta + \alpha)^2 - 4\alpha\beta = 4$ 05

$\Rightarrow \frac{4}{9}(a+b)^2 - \frac{4}{3}ab = 4$ 05 05

$\Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - 3ab = 9$

$\Rightarrow a^2 - ab + b^2 = 9$ 05

35

$b^2 - ab + a^2 = 9$

$\Rightarrow \left(b - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} - a^2 + 9$

$= -\frac{3a^2}{4} + 9$

$= \frac{3}{4}\left(12 - a^2\right)$ 10

$\Rightarrow 12 - a^2 \geq 0$ 05 $\Rightarrow |a| \leq \sqrt{12}$ 05

$b = \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{12 - a^2}$ 10

(b) $f(x) = x^3 + 4x^2 + cx + d$

$f(-c) = -c^3 + 4c^2 - c^2 + d = -c^3$ 05

$\Rightarrow 3c^2 + d = 0 \quad ------(1)$ 05

$f(c) = c^3 + 4c^2 + c^2 + d = 0$ 05

$\Rightarrow c^3 + 5c^2 + d = 0 \quad ------(2)$ 05

$(2) - (1)$ මගින් $c^3 + 2c^2 = 0$ ලැබේ.

$\Rightarrow c^2(c + 2) = 0$ 05

$c \neq 0$ නිසා $c = -2$ 05

$\Rightarrow d = -3c^2 = -12$ 05

35

දැන් $f(x) = x^3 + 4x^2 - 2x - 12$

$f(x)$ යන්න $x^2 - 4$ මගින් බෙදූ විට ශේෂය $\lambda x + \mu$ ආකාරය ගනී.

එනම් $f(x) = (x^2 - 4)q(x) + \lambda x + \mu$ 05

$\Rightarrow f(x) = (x - 2)(x + 2)q(x) + \lambda x + \mu$

$f(2) = 8 = 2\lambda + \mu$ හා 05

$f(-2) = 0 = -2\lambda + \mu$ 05

$\Rightarrow \mu = 4$ හා $\lambda = 2$ 05

$\therefore$ ශේෂය $= 2x + 4$ 05

25

12. (a) එක එකක පිරිමි ළමයින් තිදෙනකු හා ගැහැණු ළමයින් දෙදෙනෙකු සිටින කණ්ඩායම් දෙකක සාමාජිකයන් අතුරෙන් , සාමාජිකයන් හය දෙනෙකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගත යුතුව ඇත්තේ කමිටුවේ සිටින ගැහැණු ළමයින් සංඛ්‍යාව වැඩි කරමින් දෙදෙනකු වන පරිදි ය.

(i) කමිටුවට එක් එක් කණ්ඩායමෙන් සාමාජිකයන් ඉරට්ටේ සංඛ්‍යාවක් තෝරා ගත යුතු නම් ,

(ii) කමිටුවට එක් ගැහැණු ළමයකු පමණක් තෝරා ගත යුතු නම් ,

සෑදිය හැකි එවැනි වෙනත් කමිටු ගණන සොයන්න.

(b) $r \in z^{+}$ සඳහා $f(r)=\dfrac{1}{(r+1)^2}$ සහ $U_r=\dfrac{(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ යැයි ගනිමු.

$r \in z^{+}$ සඳහා $f(r)-f(r+2)=4U_r$ බව පෙන්වන්න.

ඒනයින් $n \in z^{+}$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} U_r=\dfrac{13}{144}-\dfrac{1}{4(n+2)^2}-\dfrac{1}{4(n+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව අපෝහනය කර එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

$n \subset z^{+}$ සඳහා $t_n=\sum_{r=n}^{2n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$\lim_{n\to\infty} t_n=0$ බව පෙන්වන්න.

(a) (i)

තේරිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන		කමිටු ගණන	
1 කණ්ඩායම	2 කණ්ඩායම		
2	4		
1G 1B	1G 3B	$2\times3\times2\times1=12$	10
2B	1G 3B	${}^3C_2\times2\times1=6$	10
2B	2G 2B	${}^3C_2\times{}^2C_2\times{}^3C_2=9$	10
		27	05

$\therefore$ වෙනස් කමිටු ගණන $=27\times2$

$=54$ 10

45

(ii) 1G 5B

10 ${}^4C_1\times{}^6C_5=24$ 05

15

(i) වෙනත් ක්‍රමයක්

1 කණ්ඩායම		2 කණ්ඩායම		කමිටු ගණන	
M (3)	F (2)	M (3)	F (2)		
2		2	2	${}^3C_2\times{}^3C_2\times{}^2C_2=9$	10
2		3	1	${}^3C_2\times{}^3C_3\times{}^2C_1=6$	10
1	1	3	1	${}^3C_1\times{}^2C_1\times{}^3C_3\times{}^2C_1=12$	10
2	2	2		9	
3	1	2		6	05
3	1	1	1	12	

කමිටු ගණන : $9+6+12+9+6+12=54$ 10

(b) $f(r)-f(r+2)=\dfrac{1}{(r+1)^2}-\dfrac{1}{(r+3)^2}$ 05

$=\dfrac{4(r+2)}{(r+1)^2(r+3)^2}$ 05

$=4U_r$ 05

15

එවිට

$$r=1;\quad 4U_1=f(1)-f(3)$$
$$r=2;\quad 4U_2=f(2)-f(4) \quad 10$$
$$r=3;\quad 4U_3=f(3)-f(5)$$
$$\vdots$$
$$r=n-2;\quad 4U_{n-2}=f(n-2)-f(n)$$
$$r=n-1;\quad 4U_{n-1}=f(n-1)-f(n+1) \quad 10$$
$$r=n;\quad 4U_n=f(n)-f(n+2)$$

$$\sum_{r=1}^{n}U_r=f(1)+f(2)-f(n+1)-f(n+2)$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{(n+2)^2}-\frac{1}{(n+3)^2}$$
$$\therefore\ \sum_{r=1}^{n}U_r=\frac{13}{144}-\frac{1}{4(n+2)^2}-\frac{1}{4(n+3)^2} \quad 10$$

40

$n\to\infty$ විට ද.පැ. හි සීමාව $\frac{13}{144}$ 05

$\therefore\ \sum_{r=1}^{\infty}U_r$ අභිසාරී වන අතර එකතුව $\frac{13}{144}$ 05

05

15

$$t_n=\sum_{r=n}^{2n}U_r$$
$$=\sum_{r=n}^{2n}U_r-\sum_{r=n}^{n-1}U_r \quad 05$$

$\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ අභිසාරී බැවින්

$$\lim_{n\to\infty}t_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{2n}U_r-\lim_{n\to\infty}\sum_{r=1}^{n-1}U_r \quad 05$$
$$=\frac{13}{144}-\frac{13}{144} \quad 05$$
$$=0 \quad 05$$

20

13. (a) $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\2&4&-1\end{pmatrix}$ හා $B=\begin{pmatrix}3&2a\\-1&0\\1&3a\end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

මෙහි $a\in R$ වේ.

$P=AB$ මගින් අර්ථ දැක්වෙන P න්‍යාසය සොයා a හි කිසිදු අගයකට P^{-1} නොපවතින බව පෙන්වන්න.

$P\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ නම් $a=2$ බව පෙන්වන්න.

a සඳහා මෙම අගය සහිතව $Q=P+I$ යැයි ගනිමු.

මෙහි I යනු ගණය 2 වන ඒකක න්‍යාසයකි.

Q^{-1} ලියා දක්වා $AA^T - \frac{1}{2}R = \left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$ වන පරිදි R න්‍යාසය සොයන්න.

(b) $z = x + iy$ යැයි ගනිමු. මෙහි x , $y \in R$ වේ.

z හි මාපාංකය $|z|$ හා ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

(i) $z\bar{z} = |z|^2$

(ii) $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re} z$ හා $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im} z$ බව පෙන්වන්න.

$z \neq 1$ හා $w = \dfrac{1+z}{1-z}$ යැයි ගනිමු.

$\operatorname{Re} w = \dfrac{1-|z|^2}{|1-z|^2}$ හා $\operatorname{Im} w \dfrac{2\operatorname{Im} z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$z = \cos\alpha + i\sin\alpha \;(0 < \alpha < 2\pi)$ නම් $w = i\cot\dfrac{\alpha}{2}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(c) ආගන්ඩ් සටහනක A හා B ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් $-3i$ හා 4 සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරයි. C හා D ලක්ෂ්‍ය පළමුවන වෘත්ත පාදකයේ පිහිටන්නේ $ABCD$ රොම්බසයක් හා $B\hat{A}D = \theta$ වන පරිදි ය. මෙහි $\theta = \sin^{-1}\left(\dfrac{7}{25}\right)$ වේ.

C හා D ලක්ෂ්‍ය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යා සොයන්න.

(a) $P = AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 2a \\ -1 & 0 \\ 1 & 3a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}$ 10

10

$\begin{vmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{vmatrix} = 2a - 2a = 0$ 05

$\therefore$ a හි කිසිම අගයක් සඳහා p^{-1} නොපවතී. 05

10

වෙනත් ක්‍රමයක්

p^{-1} පැවතීම සඳහා 05

$\begin{pmatrix} 2 & 2a \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b, c, d, e \in R$ වන පරිදි පැවතිය යුතු ය.

$\Leftrightarrow$ $2b + 2ad = 1$, $b + ad = 0$, $2c + 2ae = 0$ සහ $c + ae = 1$

මෙය විසංවාදයකි.

$\therefore$ a හි කිසිම අගයක් සඳහා p^{-1} නොපවතී. 05

10

If $P\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ නම් $\begin{pmatrix} 2+4a \\ 1+2a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ 05

$\Leftrightarrow \quad 2+4a=10$ සහ $1+2a=5$ 05

$\Leftrightarrow \quad a=2$

10

$a=2$

$$Q=P+I=\begin{pmatrix}2&4\\1&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&4\\1&3\end{pmatrix} \quad 05$$

$$\therefore \quad Q^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3&-4\\-1&3\end{pmatrix} \quad 10$$

15

$$AA^T-\frac{1}{2}R=\left(\frac{1}{5}Q\right)^{-1}$$

$$=5Q^{-1} \quad 05$$

$$\Leftrightarrow \quad R=2AA^T-10Q^{-1}$$

$$=2\begin{pmatrix}1&1&0\\2&4&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&4\\0&-1\end{pmatrix}-10\left(\frac{1}{5}\right)\begin{pmatrix}3&-4\\-1&3\end{pmatrix} \quad 05$$

05

$$=2\begin{pmatrix}2&6\\6&21\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6&-8\\-2&6\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-2&20\\14&36\end{pmatrix} \quad 05$$

20

(b) $z=x+iy \qquad x\ ,\ y\in R$

05 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$ සහ $\bar{z}=x-iy$ 05

10

(i) $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$ 05

(ii) $z+\bar{z}=(x+iy)+(x-iy)=2x=2\,\mathrm{Re}\,z$ සහ 05

$z-\bar{z}=(x+iy)-(x-iy)=2iy=2i\,\mathrm{Im}\,z$ 05

15

$z\neq 1$ නම් $w=\dfrac{1+z}{1-z}\times\dfrac{1-\bar{z}}{1-\bar{z}}=\dfrac{1-z\bar{z}+z-\bar{z}}{|1-z|^2}=\dfrac{1-|z|^2+2i\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}$

05 05 05

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Re}\,w=\frac{1-|z|^2}{|1-z|^2} \text{ සහ } \mathrm{Im}\,w=\frac{2\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2} \quad 05$$

20

$z=\cos\alpha+i\sin\alpha \quad (0<\alpha<2\pi)$

එවිට $|z|=1 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}\,w=0$ 05

$$\therefore \quad w=\frac{2i\,\mathrm{Im}\,z}{|1-z|^2}=\frac{2i\sin\alpha}{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha} \quad 05$$

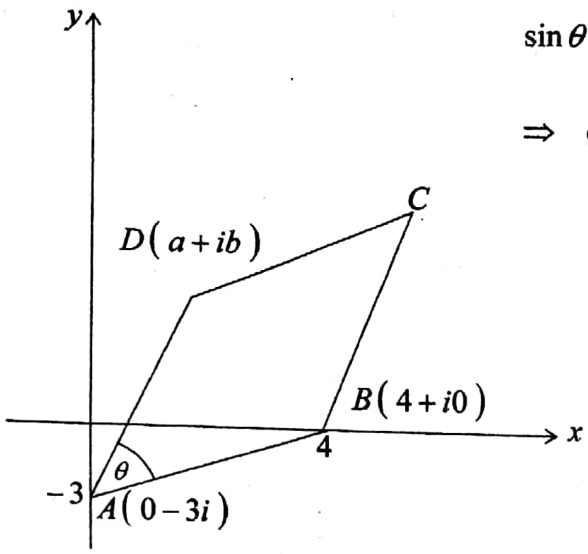
05

05

$$=\frac{2i\sin\alpha}{2(1-\cos\alpha)}=i\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=i\cot\frac{\alpha}{2}$$

20

(c)



$\sin\theta=\frac{7}{25}\quad\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$

$\Rightarrow\quad\cos\theta=\frac{24}{25}$

$D\equiv(a\,,\,b)$ යයි ගනිමු.

A වටා AB වාමාවර්තව භ්‍රමණය කිරීමෙන් AD ගත හැක.

$\therefore\quad a+i(b+3)=(4+3i)(\cos\theta+i\sin\theta)$ 10

$\qquad\qquad=(4+3i)\left(\frac{24}{25}+i\frac{7}{25}\right)$

$\Leftrightarrow\quad a+i(b+3)=3+4i$

$\Leftrightarrow\quad a=3$ සහ $b=1$

$\therefore\quad D$ මගින් $3+i$ නිරූපණය කරයි. 05

$C\equiv(p\,,\,q)$ නම් $\frac{p+0}{2}=\frac{3+4}{2}$ හා $\frac{q-3}{2}=\frac{1+0}{2}$

$\Rightarrow p=7$ හා $q=4$

$\therefore\quad c$ මගින් $7+4i$ නිරූපණය කරයි. 05

20

14. **(a)** $x\neq-1\,,\,\frac{1}{3}$ සඳහා $f(x)=\frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$ යැයි ගනිමු.

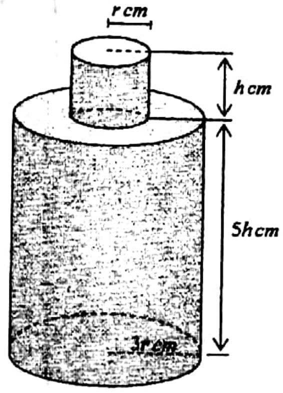
$x\neq-1\,,\,\frac{1}{3}$ සඳහා $f(x)$ හි ව්‍යුත්පන්නය, $f'(x)$ යන්න

$f'(x)=\frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශෝන්මුඛ හා හැරුම් ලක්ෂ්‍ය දක්වමින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $k(x+1)^2(3x-1)=16(x-1)$ සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පවතින පරිදි $k\in R$ හි අගයන් සොයන්න.

(b) අරය $3r\,cm$ හා උස $5h\,cm$ වන සංවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක උඩත් මුහුණතින් අරය $r\,cm$ වන තැටියක් ඉවත් කර , අරය $r\,cm$ හා උස $h\,cm$ වන විවෘත කුහර සෘජු වෘත්ත සිලින්ඩරයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සවි කර $391\pi\,cm^3$ ක පරිමාවක් සහිත බෝතලයක් සාදා ගත යුතුව ඇත. බෝතලයේ මුළු පෘෂ්ඨ වර්ගඵලය $S\,cm^2$ යන්න $S=\pi r(32h+17r)$ බව දී ඇත. S අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.



(a) $x \neq -1\ ,\ \frac{1}{3}$ සඳහා ; $f(x)=\dfrac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$

එවිට 15

$$f'(x)=\frac{16(x-1)^2(3x-1)-16(x-1)\left[2(x+1)(3x-1)+3(x+1)^2\right]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$=\frac{16(x+1)\left[(x+1)(3x-1)-2(x-1)(3x-1)-3(x-1)(x+1)\right]}{(x+1)^4(3x-1)^2}$$

$$=\frac{-32x(3x-5)}{(x+1)^3(3x-1)^2};\left(x\neq -1\ ,\ \frac{1}{3}\right) \quad 10$$

25

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$ එවිට $y=0$ 05

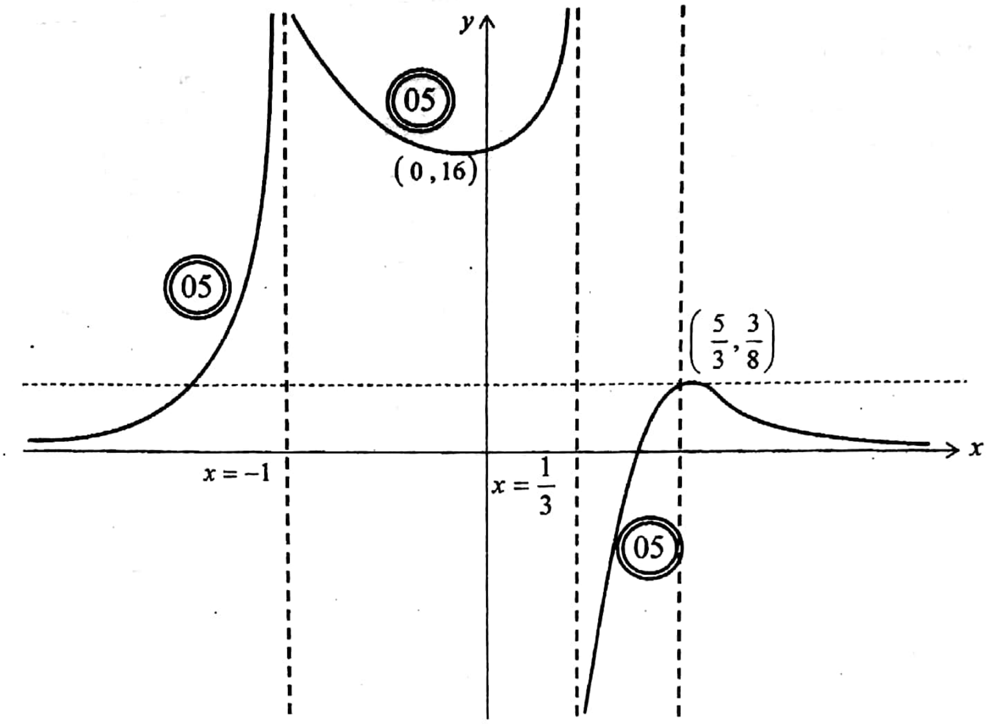
$\lim_{x\to -1^{\pm}} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to \frac{1}{3}^-} f(x)=\infty$ සහ $\lim_{x\to \frac{1}{3}^+} f(x)=-\infty$

සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ : $x=-1$ සහ $x=\frac{1}{3}$

හැරුම් ලක්ෂ්‍යවලදී $f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ හෝ $x=\frac{5}{3}$ 05

	$-\infty<x<-1$	$-1<x<0$	$o<x<\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}<x<\frac{5}{3}$	$\frac{5}{3}<x<\infty$
$f'(x)$ ලකුණ	$(+)$	$(-)$	$(+)$	$(+)$	$(-)$
	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	f ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ.	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	f ඒකවිධ ලෙස වැඩිවේ.	f ඒකවිධ ලෙස අඩුවේ.
	05	05	05	05	05

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය : $(0\ ,\ 16)$ ස්ථානීය අවමයක් සහ $\left(\frac{5}{3}\ ,\ \frac{3}{8}\right)$ ස්ථානීය උපරිමයක්
05 05



60

$$k(x+1)^2(3x-1)=16(x-1)$$

$$\Leftrightarrow \quad k=\frac{16(x-1)}{(x+1)^2(3x-1)}$$ (05)

$k \leq 0$ හෝ $\frac{3}{8}<k<16$ එනම් පමණක් දෙන ලද සමීකරණයට හරියටම එක් මූලයක් පමණක් පවතී.

15

(b) පරිමාව : $391\pi=\pi(3r)^2(5h)+\pi r^2 h$ (10)

$$\Rightarrow \quad 391=46r^2h$$

$$\Rightarrow \quad h=\frac{17}{2r^2}\ , \quad (r>0)$$ (05)

පෘෂ්ඨීක වර්ගඵලය : $S=\pi r(32h+17r)$

$$=17\pi\left(\frac{16}{r}+r^2\right)$$ (05)

(05) $$\frac{dS}{dr}=17\pi\left(\frac{16}{r^2}+2r\right)=\frac{34\pi(r^3-8)}{r^2}$$ (05)

$$\frac{dS}{dr}=0 \quad \Leftrightarrow \quad r=2$$

$0<r<2$ විට දී $\frac{dS}{dr}<0$ සහ $r>2$ විටදී $\frac{dS}{dr}>0$

(05) (05)

$\therefore \ r=2$ විට දී S අවම වේ. (05)

50

15. **(a)** (i) x^2 , x^1 හා x^0 හි සංගුණක සැසඳීමෙන්

සියලු $x \in R$ සඳහා $Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)-Ax^3=1$

වන පරිදි A , B හා C නියතවල අගයන් සොයන්න.

එනයින් , $\frac{1}{x^3(x-1)}$ යන්න භින්න භාග වලින් ලියා දක්වා

$\int \frac{1}{x^3(x-1)}dx$ සොයන්න.

(ii) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \cos 2x dx$ සොයන්න.

(b) $\theta = \tan^{-1}(\cos x)$ ආදේශය භාවිතයෙන් ,

$\int_0^a \frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx = 2\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

a නියතයක් වන $\int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(a-x)dx$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් ,

$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx$ සොයන්න.

(a) (i) $Ax^2(x-1)+Bx(x-1)+C(x-1)-Ax^3=1$

සංගුණක සැසඳීමෙන් :

$x^2 \ : \ -A+B=0$ 05

$x^1 \ : \ -B+C=0$ 05

$x^0 \ : \ -C=1$ 05

$A=-1$, $B=-1$ and $C=-1$ 05

20

$1=-x^2(x-1)-x(x-1)-(x-1)+x^3$

$\therefore$ $\frac{1}{x^3(x-1)}$ භින්න භාග ඇසුරින්

$\frac{1}{x^3(x-1)} = -\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x-1}$ ලෙස වේ. 05

එනයින් $\int \frac{1}{x^3(x-1)}dx = -\int\frac{1}{x}dx-\int\frac{1}{x^2}dx-\int\frac{1}{x^3}dx+\int\frac{1}{x-1}dx$

$= -\ln|x|+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\ln|x-1|+C$ 05

05 05 05 05

මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ.

30

(ii) $\int x^2\cos 2x dx = \frac{x^2\sin 2x}{2}-\frac{1}{2}\int 2x\sin 2x dx$ 05 05

$$=\frac{x^2\sin 2x}{2}+\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx \quad 05 \quad 05$$

$$=\frac{x^2\sin 2x}{2}+\frac{x\cos 2x}{2}-\frac{\sin 2x}{4}+C \quad 05$$

මෙහි C යනු අභිමත නියතයක් වේ. 05

$\boxed{30}$

(b) $\theta=\tan^{-1}(\cos x);\ -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}$

$$\tan\theta=\cos x \Rightarrow \sec^2\theta\,d\theta=-\sin x\,dx \quad 05$$

$$x=0 \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(1) \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{4} \quad 05$$

$$x=\pi \Rightarrow \theta=\tan^{-1}(-1) \Rightarrow \theta=-\frac{\pi}{4} \quad 05$$

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{\sec^2\theta}{\sqrt{\sec^2\theta}}d\theta=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\sec\theta\,d\theta \quad 05 \quad 05 \quad 05$$

$$\left(\sqrt{\sec^2\theta}=\sec\theta \text{ as } -\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sec\theta(\sec\theta+\tan\theta)}{(\sec\theta+\tan\theta)}d\theta \quad 05$$

$$=\ln\left|\sec\theta+\tan\theta\right|\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \quad 05$$

$$=\ln(\sqrt{2}+1)-\ln(\sqrt{2}-1) \quad 05$$

$$=\ln\left(\frac{(\sqrt{2}+1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}-1)}\right)$$

$$=2\ln(\sqrt{2}+1) \quad 05$$

$\boxed{50}$

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{\sqrt{1+\cos^2(\pi-x)}}dx \quad 05$$

$$=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx-\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{\sqrt{1+\cos^2 x}}dx \quad 05$$

$$\Rightarrow I=\pi\left[2\ln(\sqrt{2}+1)\right]-I \quad 05$$

$$\Rightarrow 2I=2\pi\ln(\sqrt{2}+1)$$

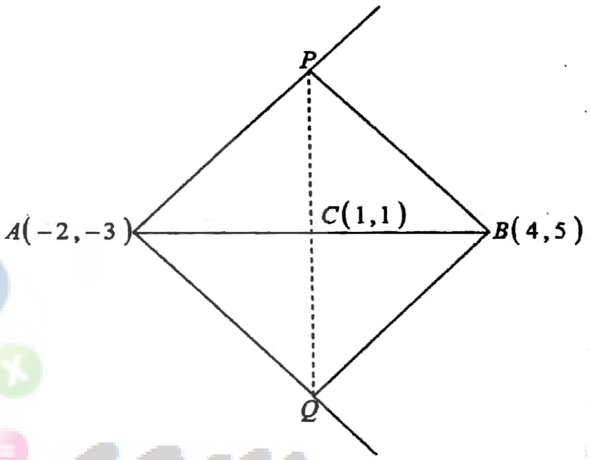
$$\Rightarrow I=\pi\ln(\sqrt{2}+1) \quad 05$$

$\boxed{20}$

16. $A \equiv (-2\ ,\ -3)$ හා $B \equiv (4\ ,\ 5)$ යැයි ගනිමු. AB රේඛාව සමග l_1 හා l_2 රේඛා එක එකක් සාදන සුළු කෝණය $\frac{\pi}{4}$ වන පරිදි A ලක්ෂ්‍යය හරහා යන l_1 හා l_2 රේඛාවල සමීකරණය සොයන්න.

P හා Q ලක්ෂ්‍ය පිළිවෙලින් l_1 හා l_2 මත ගෙන ඇත්තේ $APBQ$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි ය. PQ හි සමීකරණය සොයා P හා Q හි ඛණ්ඩාංක සොයන්න.
තව ද A , P , B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන S වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.
$\lambda > 1$ යැයි ගනිමු.
$R \equiv (4\lambda\ ,\ 5\lambda)$ ලක්ෂ්‍යය , S වෘත්තයට පිටතින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.
R ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය සොයන්න.
$\lambda\,(>1)$ විචලනය වන විට , මෙම ස්පර්ශ ජ්‍යායන් අචල ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන බව පෙන්වන්න.

$$\tan\frac{\pi}{4} = \left|\frac{m-\frac{4}{3}}{1+\frac{4m}{3}}\right| \quad 10$$



$$\Rightarrow \left(m-\frac{4}{3}\right)^2 = \left(1+\frac{4m}{3}\right)^2 \quad 05$$

$$\Rightarrow 7m^2+48m-7=0$$

$$\Rightarrow (7m-1)(m+7)=0$$

$$\Rightarrow m=\frac{1}{7} \text{ or } m=-7$$

05 05

∴ අවශ්‍ය සමීකරණය වන්නේ

(i) $y+3=\frac{1}{7}(x+2) \Rightarrow x-7y-19=0$ 10

සහ

(ii) $y+3=-7(x+2) \Rightarrow 7x+y+17=0$ 10

45

l_1 යනු $x-7y-19=0$ රේඛාව සහ අනෙක l_2 යැයි ගනිමු.

PQ හි සමීකරණය: $y-1=-\frac{3}{4}(x-1) \Rightarrow 3x+4y-7=0$ 10

l_1 සහ PQ හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය: $P=(5\ ,\ -2)$ 05

$Q=(x_0\ ,\ y_0)$ නම් ,

$$\frac{5+x_0}{2}=1 \Rightarrow x_0=-3 \quad 05$$

$$\frac{-2+y_0}{2}=1 \Rightarrow y_0=4$$

$Q \equiv (-3\ ,\ 4)$ 05

25

A , P , B හා Q ලක්ෂ්‍ය හරහා යන වෘත්තය AB විෂ්කම්භය ලෙස ඇති වෘත්තය වේ. 10

$(y-5)(y+3)+(x-4)(x+2)=0 \Rightarrow x^2+y^2-2x-2y-23=0$ 10

20

$CR^2=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2$ හා වෘත්තයේ අරය 5 වේ. 10

දැන් $CR^2-25=(4\lambda-1)^2+(5\lambda-1)^2-25$ 05

$=41\lambda^2-18\lambda-2$

$=(\lambda-1)(41\lambda+23)>0 \; as \; \lambda>1$ 10

$\therefore$ R ලක්ෂ්‍යය වෘත්තයට පිටතින් පිහිටයි. 05

30

අවශ්‍ය ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය

$x(4\lambda)+y(5\lambda)-(x+4\lambda)-(y+5\lambda)-23=0$ 10

$(-x-y-23)+\lambda(4x+5y-9)=0$ 05

$\therefore$ ස්පර්ශ ජ්‍යාය $4x+5y-9=0$ හා $x+y+23=0$ රේඛාවල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය හරහා යයි. 10

එය අචල ලක්ෂ්‍යයකි. 05

30

17. (a) $0\le\theta\le\pi$ සඳහා $\cos 2\theta+\cos 3\theta=0$ විසඳන්න. $\cos\theta$ ඇසුරෙන් $\cos 2\theta$ හා $\cos 3\theta$ ලියා දක්වා , $\cos 2\theta+\cos 3\theta=4t^3+2t^2-3t-1$ බව පෙන්වන්න. මෙහි $t=\cos\theta$ වේ.

ඒනයින් $4t^3+2t^2-3t-1=0$ සමීකරණයෙහි මූල තුන ලියා දක්වා $4t^2-2t-1=0$ සමීකරණයෙහි මූල $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\cos\frac{3\pi}{5}$ බව පෙන්වන්න.

(b) ABC ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු $BD:DC=m:n$ වන පරිදි BC මත වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. මෙහි m , $n>0$ වේ.

$B\hat{A}D=\alpha$ හා $D\hat{A}C=\beta$ බව දී ඇත.

BAD හා DAC ත්‍රිකෝණ සඳහා සයින් නීතිය භාවිතයෙන් $\frac{mb}{nc}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ බව පෙන්වන්න.

මෙහි $b=AC$ හා $c=AB$ වේ.

ඒ නයින් $\frac{mb-nc}{mb+nc}=\tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(a) $0 \le \theta \le \pi$ සඳහා $\cos 3\theta = -\cos 2\theta = \cos(\pi - 2\theta)$ 05 05

$3\theta = 2n\pi \pm (\pi - 2\theta)$, $n \in z$ 05

$5\theta = 2n\pi + \pi$, $n \in z$ or $\theta = 2n\pi - \pi$, $n \in z$

$0 \le \theta \le \pi$ බැවින් විසඳුම් $\theta = \pi$, $\frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ 05

05 05

30

---

05 05

$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$ *and* $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$\therefore \quad \cos 2\theta + \cos 3\theta = 4\cos^3\theta + 2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 1$

$= 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$, මෙහි $t = \cos\theta$ 10

20

$\therefore \quad 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\pi$, $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ 10

$\cos\pi = -1 \Rightarrow t = 1$ යනු $4t^3 + 2t^2 - 3t - 1$ හි සාධකයකි.

$\Rightarrow 4t^3 + 2t^2 - 3t - 1 = (t+1)(4t^3 - 2t - 1) = 0$ 10

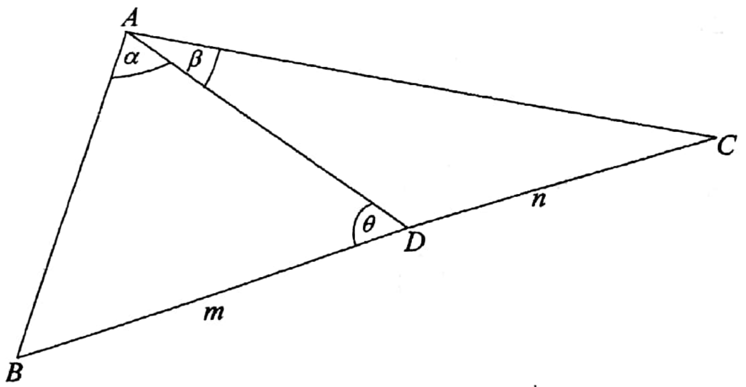
$\Rightarrow 4t^2 - 2t - -1 = 0$ හි මූලයන් $\cos\frac{\pi}{5}$ හා $\frac{3\pi}{5}$ 05

$t = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \times 4 \times 1}}{2 \times 4} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ 05

$\cos\frac{3\pi}{5} < 0$ බැවින් $\cos\frac{3\pi}{5} = \frac{1 - \sqrt{5}}{4}$ 05

35

(b)



$B\hat{D}A = \theta$ යැයි ගනිමු.

සයින් නීතිය භාවිතයෙන් :

$BAD\,\Delta : \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\theta}$ 10

$ADC\,\Delta : \frac{DC}{\sin\beta} = \frac{b}{\sin(\pi - \theta)}$ 10

$$\Rightarrow \frac{(BD)\sin\beta}{(DC)\sin\alpha} = \frac{c}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{mb}{nc} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \quad 05$$

$$mb = nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

$$\Rightarrow \frac{mb-nc}{mb+nc} = \frac{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} - nc}{nc\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} + nc}$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \; 05}{2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) \; 05}$$

$$= \tan\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cot\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \quad 05$$

20

(c) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \gamma$ හා $\tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right) = \delta$ යැයි ගනිමු. $0 < \delta, \gamma < \frac{\pi}{2}$

05 $2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2\gamma = \frac{\pi}{2} - \delta$

$\Leftrightarrow \tan(2\gamma) = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right)$

($\frac{\pi}{2} - \delta$ සුළු කෝණයක් බැවින් , 2γ ද සුළු කෝණයකි.)

$$\tan 2\gamma = \frac{2\tan\gamma}{1-\tan^2\gamma} = \frac{2\times\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \quad 05$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) = \cot\delta = \frac{3}{4} \quad 05$$

$$\therefore \; 2\gamma + \delta = \frac{\pi}{2} \quad 05$$

20

1. සුමට තිරස් මේසයක් මත එකම සරල රේඛාවක් දිගේ එකිනෙක දෙසට එකම u වේගයෙන් චලනය වෙමින් තිබෙන, ස්කන්ධ පිළිවෙළින් $2m$ හා m වූ A හා B අංශු දෙකක් සරල ලෙස ගැටේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු A අංශුව නිශ්චලතාවට පැමිණෙයි. ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ බව ද ගැටුම නිසා B මත යෙදුන ආවේගයෙහි විශාලත්වය $2mu$ බව ද පෙන්වන්න.

පද්ධතියට $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්

$\rightarrow \quad 0 = [2m(0) + mv] - [2mu - mu]$ 5

$\Rightarrow mv = mu.$

$\Rightarrow v = u$ 5

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය යෙදීමෙන්: $v - 0 = -e(-u - u)$ 5

$u = e(2u)$

$e = \frac{1}{2}.$ 5

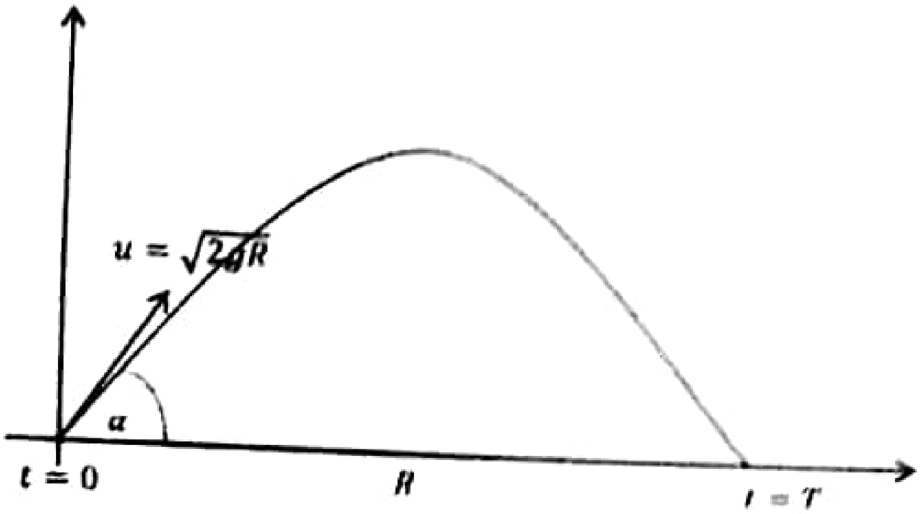
B සඳහා $\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ යෙදීමෙන්:

$\rightarrow$ ආවේගය $= mv - m(-u)$

$= mu + mu = 2mu.$ 5

25

2. [illegible] $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ [illegible] $u = \sqrt{2gR}$ [illegible] R [illegible] $\frac{\pi}{3}$ [illegible]



$s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්, [illegible] T:

$\uparrow \quad 0 = (u \sin \alpha)T - \frac{1}{2} gT^2 \Rightarrow T = \frac{2u \sin\alpha}{g}$ (5)

$\rightarrow \quad R = (u \cos\alpha). T = \frac{2u^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$ (5)

$R = 2R \sin2\alpha; \quad \sin2\alpha = \frac{1}{2}$ (5)

$$2\alpha = \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}$$

[illegible]:

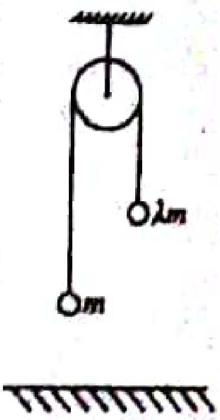
$\alpha_1 = \frac{\pi}{12}$ හා $\alpha_2 = \frac{5\pi}{12}$, (5)

$\therefore \alpha_2 - \alpha_1 = \frac{\pi}{12}(5 - 1) = \frac{\pi}{3}$ (5)

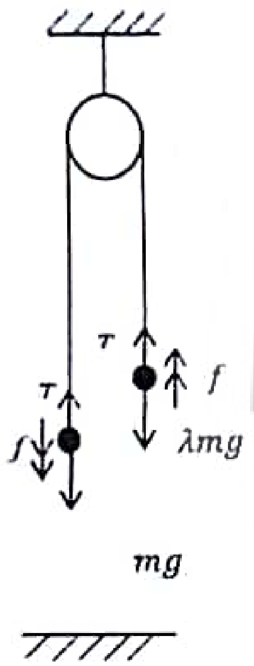
25

Scanned by CamScanner

3. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් හා ස්කන්ධය λm වූ Q අංශුවක් අචල, සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක දෙකෙළවරට ඈඳා ඇත. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි, තන්තුව තදව ඇතිව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. P අංශුව $\frac{g}{2}$ ත්වරණයකින් පහළට චලනය වේ. $\lambda = \frac{1}{3}$ බව පෙන්වන්න.
P අංශුව තිරස් අප්‍රත්‍යාස්ථ ගෙබිමක v වේගයෙන් ගැටෙයි නම් හා Q අංශුව කිසිවිටෙකත් කප්පිය කරා ළඟා නොවේ නම්, P අංශුව බිම ගැටුණු මොහොතේ සිට Q අංශුව උපරිම උසට ළඟා වීමට ගන්නා කාලය සොයන්න.



....



$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

P සඳහා: $\downarrow \quad mg - T = m\left(\frac{g}{2}\right)$ -------------------- (1) 5

Q සඳහා: $\uparrow \quad T - \lambda mg = \lambda m\left(\frac{g}{2}\right)$ -------------------- (2) 5

$(1) + (2) \Longrightarrow (1 - \lambda)mg = (1 + \lambda)m(g/2)$ 5

$\Longrightarrow \quad 2(1 - \lambda) = (1 + \lambda)$

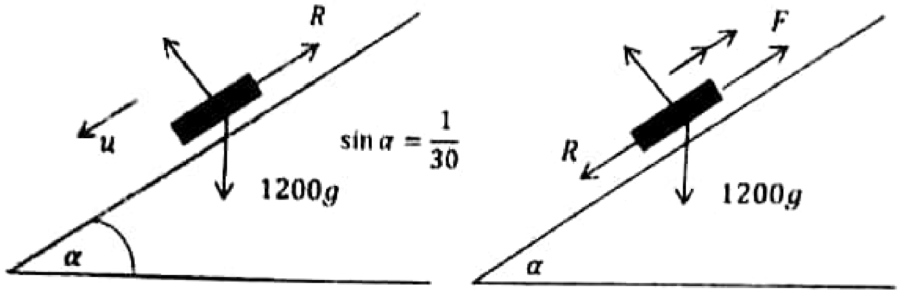
$\lambda = \frac{1}{3}$. 5

Q ට, එහි උපරිම උසට ළඟා වීමට ගතවන කාලය T යන්න
$0 = v - gT$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$\Longrightarrow T = \frac{v}{g}$ 5

4 ස්කන්ධය 1200 kg වූ කාරයක් එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කර තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ සෘජු පාරක් දිගේ පහළට ඒම නියත වේගයකින් චලනය වේ; මෙහි $\sin\alpha = \frac{1}{30}$ වේ. ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 10\ \text{m s}^{-2}$ ලෙස ගනිමින් කාරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධය නිව්ටන වලින් සොයන්න.

කාරය, එම ප්‍රතිරෝධයට යටතේ $\frac{1}{6}\ \text{m s}^{-2}$ ත්වරණයක් සහිත ව එම පාර දිගේ ඉහළට ගමන් කරන විට, එහි වේගය $15\ \text{m s}^{-1}$ වන මොහොතේ දී එන්ජිමේ ජවය කිලෝවොට් වලින් සොයන්න.



R ප්‍රතිරෝධය පමණක් යටතේ මෝටර් රථය පහලට චලනය වන විට,

$\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

↙ $1200\, g \sin\alpha - R = 0$ 5

$\Rightarrow \quad R = 1200(10)\left(\frac{1}{30}\right) = 400\ N.$ 5

මෝටර් රථය ඉහළට චලනය වන විට, එහි ප්‍රකර්ෂණ බලය F යැයි ගනිමු.

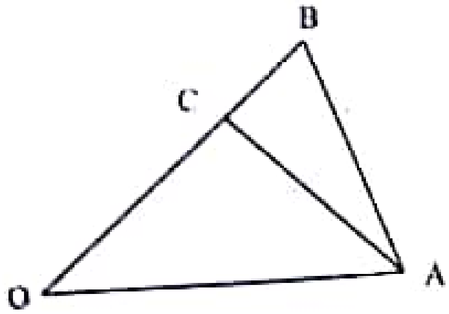
↗ $F - R - 1200\, g \sin\alpha = 1200\left(\frac{1}{6}\right) \Rightarrow F = 1000\ \text{N}$ 5

එනයින්, ජවය $P = FV = 15\,(1000)\ \text{W}$ 5

$P = 15\ \text{kW}.$ 5

25

5 සුපුරුදු අංකනයෙන්, $3\mathbf{i}$ හා $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}$ යනු O අචල මූලයක් අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. C යනු $O\hat{C}A = \frac{\pi}{2}$ වන පරිදි OB සරල රේඛාව මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OC}$ දෛශිකය $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{j}$ ඇසුරෙන් සොයන්න.



$\overrightarrow{OA} = 3\mathbf{i}, \qquad \overrightarrow{OB} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$

එවිට, $\overrightarrow{OC} = \lambda(\overrightarrow{OB}) = \lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$ වේ. මෙහි λ අදිශයකි.

5

$\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{CA}$ ට ලම්බ බැවින්,

$\lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}).\{-\lambda(2\mathbf{i} + 3\mathbf{j}) + 3\mathbf{i}\} = 0$ 5

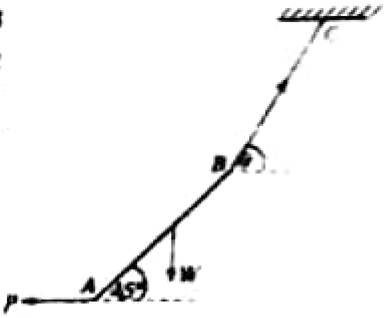
5

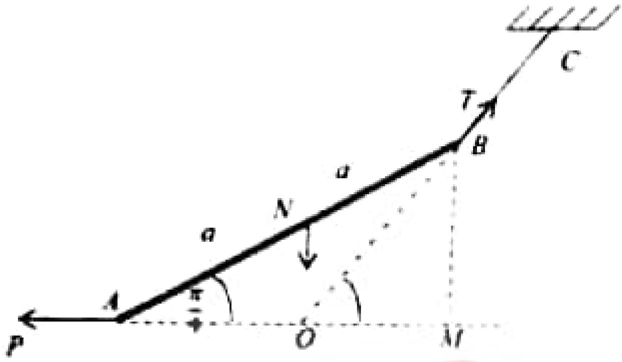
$6 - 13\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{6}{13}$ 5

$\therefore \overrightarrow{OC} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{18}{13}\mathbf{j}.$ 5

6. දිග 2a හා බර W වූ AB ඒකාකාර දණ්ඩක්, BC සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් හා A කෙළවරේ දී යොදන ලද P තිරස් බලයක් මගින් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සමතුලිතතාවයේ අල්වා තබා ඇත. දණ්ඩ, තිරස සමග $45°$ කෝණයක් සාදන බව දී ඇත්නම්, BC තන්තුව තිරස සමග සාදන θ කෝණය $\tan\theta = 2$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

එමෙන්ම තන්තුවේ ආතතිය W ඇසුරෙන් සොයන්න.





BMO සෘජු ත්‍රිකෝණයෙහි.

$BM = \frac{2a}{\sqrt{2}}$; $OM = \frac{a}{\sqrt{2}}$ (5)

$\tan\theta = \frac{BM}{OM} = \frac{2a/\sqrt{2}}{a/\sqrt{2}}$

$\tan\theta = 2$ (5)

P = W/2

$\uparrow T\sin\theta - W = 0$ (5)

$= \frac{W}{\sin\theta} = \frac{W\sqrt{5}}{2}$ (5) $\left(\because \sin\theta = \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

(5)

$\boxed{25}$

7. A [illegible] B [illegible] S [illegible] $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(B)=\frac{1}{4}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ [illegible] $P(A|B')$, $P(A'\cap B')$ [illegible] $P(B'|A')$ [illegible] A' [illegible] B' [illegible] A [illegible] B [illegible]

[illegible]:

$$P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{1}{4},\ P(A\cap B)=\frac{1}{6}$$

$$P(A\cap B')+P(A\cap B)=P(A)$$

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6} \quad 5$$

[illegible]

$$P(A|B')=\frac{P(A\cap B')}{P(B')}=\frac{P(A\cap B')}{1-P(B)}=\frac{1/6}{3/4}=\frac{2}{9} \quad 5$$

$$P(A'\cap B')=P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B) \quad 5$$

$$=1-\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{7}{12} \quad 5$$

$$P(B'|A')=\frac{P(A'\cap B')}{P(A')}=\frac{7/12}{1-1/3}=\frac{7/12}{2/3}=\frac{7}{8} \quad 5$$

25

8\. [illegible]

(i) සියල්ල රතු: $\frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{35}$

5

සියල්ල කළු: විය නොහැක.

$\therefore$ පිළිතුර $= \frac{1}{35}$. 5

(ii)

$RBRB : \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{35}$ 5

$BRBR : \frac{3}{7} \times \frac{4}{6} \times \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{35}$ 5

$\therefore$ පිළිතුර $= \frac{3}{35} + \frac{3}{35} = \frac{6}{35}$ 5

25

9. එක එකක් 10 ට අඩු ධන නිඛිල පහකට එක මාතයක් පමණක් ඇත. එවායේ මධ්‍යන්‍යය, මා
6:10:5 අනුපාතවලට පිහිටයි, එම නිඛිල පහ සොයන්න.

මාතය $2a$ යැයි ගනිමු.

එවිට, දී ඇති ධන නිඛිල: $b, c, a, 2a, 2a$ 5

මධ්‍යන්‍යය : මාතය $= 6 : 10$

$$\therefore \frac{10(b+c+5a)}{5} = 6 \times 2a$$ 5 5

$$\Rightarrow b + c = a$$

$\therefore$ දී ඇති නිඛිල වන්නේ $1, 2, 3, 6, 6.$ 10

10. කිසියම් නගරයක උෂ්ණත්වය දින 20ක් සඳහා දිනපතා වාර්තාගත කරන ලදී. එමගින් ලබාගත් දත්ත සඳහා මධ්‍යන්‍යය μ හා සම්මත අපගමනය σ පිළිවෙලින් 28 °C හා 4 °C ලෙස ගණනය කර තිබුණි. පසුව නැවත උෂ්ණත්වයන් දෙකක් 35 °C හා 21 °C ලෙස වැරදියට ඇතුළත් කර ඇති බව සොයා ගැනීමෙන් පසුව ඒවා 25 °C හා 31 °C ලෙස නිවැරදි කරන ලදී. μ හා σ හි නිවැරදි අගයන් සොයන්න.

$\mu = 28, \ \sigma_1 = 4$

නිවැරදි කළ දත්ත: $35 \rightarrow 25 \quad (-10)$

$21 \rightarrow 31 \quad (+10)$

∴ මධ්‍යන්‍යය නොවෙනස්ව පවතී.

∴ $\mu = 28$ ම වේ. 5

පැරණි $\sum x_i^2 = 20 \times \sigma_1^2 + 20\mu^2 = 20(4^2 + 28^2)$ 5

නව $\sum x_i^2 =$ පැරණි $\sum x_i^2 - 35^2 - 21^2 + 25^2 + 31^2$ 5

$= 20(4^2 + 28^2) - 8 \times 10$ 5

නව $\sigma^2 = \dfrac{20(28^2 + 4^2) - 8 \times 10 - 20 \times 28^2}{20}$

$= \dfrac{20 \times 16 - 20 \times 4}{20}$

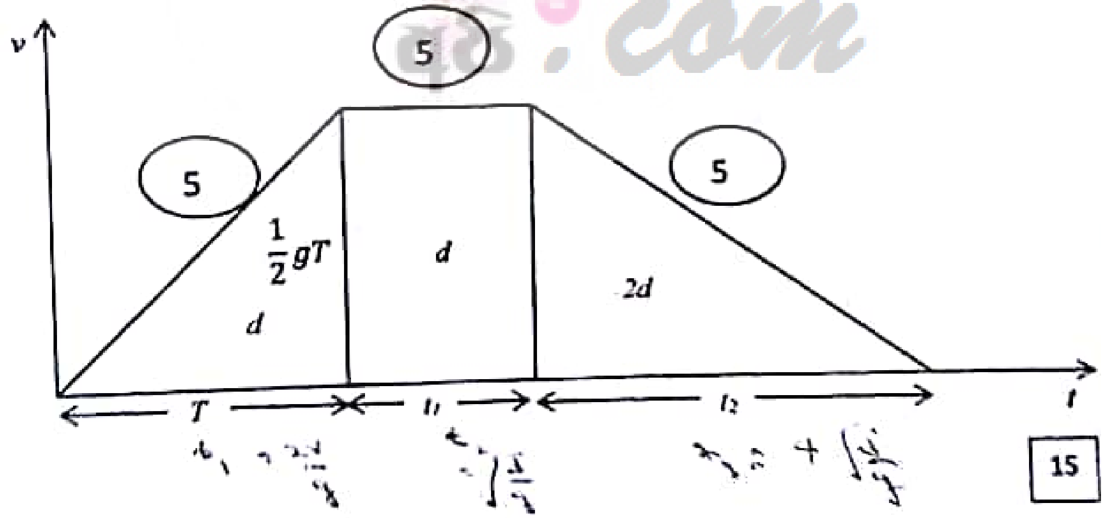
$= 12$

∴ සම්මත අපගමනය $\sigma = \sqrt{12}$. 5

25

11. (a) මීටර $4d$ ගැඹුරු පතලක චලනය වන සෝපානයක් $t = 0$ කාලයේ දී A ලක්ෂ්‍යයකින් නිශ්චලතාවේ සිට සිරස් ව පහළට චලනය වීමට පටන් ගනී. එය, පළමුව $\frac{g}{2}$ m s^{-2} නියත ත්වරණයෙන් මීටර d දුරක් චලනය වී ඊළඟට එම චලිතය අවසානයේ ලබාගත් ප්‍රවේගයෙන් තව මීටර d දුරක් චලනය වේ. සෝපානය ඉන්පසු A සිට මීටර $4d$ දුරක් පහළින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේ දී නිශ්චලතාවට පැමිණෙන පරිදි නියත මන්දනයකින් ඉතිරි දුර ද චලනය වේ.
සෝපානයේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග-කාල වක්‍රයේ දළ සටහනක් අඳින්න.
ඒ නයින්, A සිට B දක්වා පහළට චලිතය සඳහා සෝපානය ගනු ලබන මුළු කාලය සොයන්න.

(b) පොළොවට සාපේක්ෂව u km h^{-1} ඒකාකාර වේගයකින් උතුරු දිශාවට නැවක් යාත්‍රා කරයි. එක්තරා මොහොතක දී නැවේ සිට, උතුරෙන් නැගෙනහිරට β කෝණයකින්, නැවේ සිට p km දුරකින් B_1 බෝට්ටුවක් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. එම මොහොතේ දී ම, B_2 බෝට්ටුවක් නැවේ සිට බටහිරින් q km දුරකින් නිරීක්ෂණය කරනු ලැබේ. බෝට්ටු දෙකම පොළොවට සාපේක්ෂව $v(> u)$ km h^{-1} ඒකාකාර වේගයෙන් සරල රේඛීය පෙත්වල, නැව අල්ලා ගැනීමේ අපේක්ෂාවෙන් යාත්‍රා කරයි. පොළොවට සාපේක්ෂව බෝට්ටුවල පෙත් නිර්ණය කිරීම සඳහා ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එකම රූපයක අඳින්න.
පොළොවට සාපේක්ෂව B_1 බෝට්ටුවේ පෙත උතුරෙන් බටහිරට $\beta - \sin^{-1}\left(\frac{u \sin\beta}{v}\right)$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වා, පොළොවට සාපේක්ෂව B_2 බෝට්ටුවේ පෙත සොයන්න.
$\beta = \frac{\pi}{3}$ හා $v = \sqrt{3}u$ යැයි ගනිමු. $3q^2 > 8p^2$ නම්, B_1 බෝට්ටුව B_2 බෝට්ටුවට පෙර නැව අල්ලා ගන්නා බව පෙන්වන්න.



15

$$d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gT\right) \text{-------------(1)} \quad 5$$

$$d = \left(\frac{1}{2}gT\right)t_1 \text{-----------(2)} \quad 5$$

(1) හා (2) $\Rightarrow t_1 = \frac{T}{2}$ 5

$$2d = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}gT\right)\cdot t_2$$ 5

(1) හා (3)

$\Rightarrow t_2 = 2T$ 5

$(1) \Rightarrow T = \sqrt{\frac{4d}{g}}$ 5

සම්පූර්ණ කාලය $= T + t_1 + t_2$

$$= T + \frac{T}{2} + 2T = \frac{7T}{2} = 7\sqrt{\frac{d}{g}}$$ 5

$\boxed{35}$

(b) $\underline{V}(S,E) = u \uparrow$.

$\underline{V}(B_i,E) = v$ for $i = 1, 2,$

$\underline{V}(B_1,S) = \nwarrow\beta|$, සහ 10

$\underline{V}(B_2,S) = \longrightarrow$

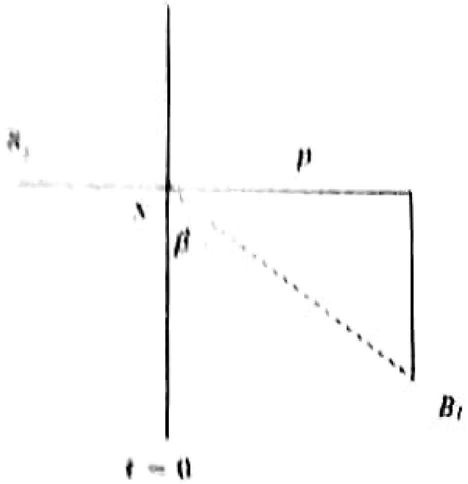
$\underline{V}(B_i,E) = \underline{V}(B_i,S) + \underline{V}(S,E)$ 10

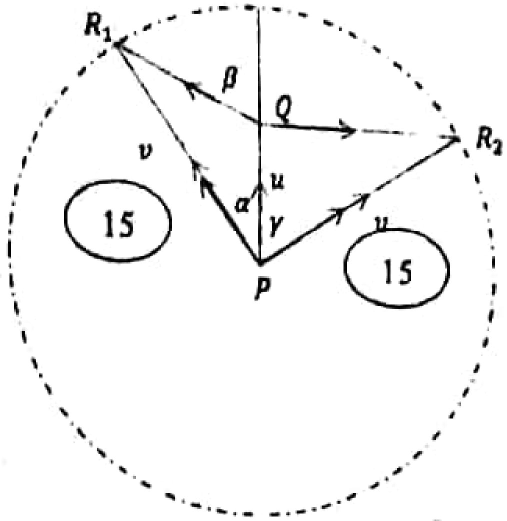
5 5

$= \underline{V}(S,E) + \underline{V}(B_i,S)$

$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$

$= \overrightarrow{PR_i}$ for $i = 1, 2.$





PQR_1 ත්‍රිකෝණයට සයින් සූත්‍රය භාවිතයෙන් $\dfrac{v}{\sin\beta} = \dfrac{u}{\sin(\beta-\alpha)}$ 5

$$\sin(\beta-\alpha) = \frac{u\sin\beta}{v}$$

$$(\beta-\alpha) = \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right)$$

$$\alpha = \beta - \sin^{-1}\left(\frac{u\sin\beta}{v}\right) \text{------------- (i)}$$ 5

R_1 හි සිට උතුරෙන් බටහිරට සාදන α කෝණය (i) මගින් දෙනු ලැබේ.

අනුරූපව R_2 හි පොළොවට සාපේක්ෂව පෙත උතුරෙන් නැගෙනහිරට γ කෝණයක් සාදයි. මෙහි

$\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{u}{v}\right)$. 5

65

(ii) දෙන ලද: $\beta = \frac{\pi}{3}$ හා $v = \sqrt{3}u$.

එවිට

$$\alpha = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{u\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\frac{u}{\sqrt{3}}}\right) = \frac{\pi}{3} - \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi}{6} \quad 5$$

$\therefore PQ = QR_1$

$\Rightarrow V(B,S) = u.$ 5

B_1 සාපේක්ෂ පථය ඔස්සේ

B_1 ට දුර $= \frac{2p}{\sqrt{3}}$ 5

B_1 ට කාලය $t_1 = \frac{\frac{2p}{\sqrt{3}}}{u} = \frac{2p}{\sqrt{3}u}$. 5

B_2 ට කාලය $t_2 = \frac{q}{\sqrt{v^2 - u^2}} = \frac{q}{u\sqrt{3-1}} = \frac{q}{\sqrt{2}u}$. 5

$t_1 < t_2$ නම් B_1, B_2 ට පෙර S අල්ලා ගනී. 5

එනම් $\frac{2p}{\sqrt{3}u} < \frac{q}{\sqrt{2}u}$

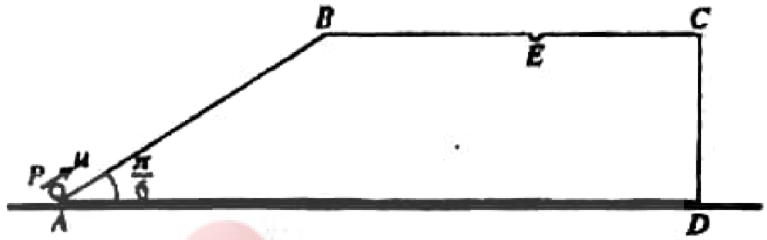
$\Rightarrow 2\sqrt{2}p < \sqrt{3}q$

$\Rightarrow 8p^2 < 3q^2$. 5

$\boxed{35}$

12. (a) $AB = a$ හා $B\hat{A}D = \frac{\pi}{6}$ වන පරිදි වූ රූපයේ දැක්වෙන $ABCD$ ත්‍රපීසියම, ස්කන්ධය $2m$ වූ සුමට ඒකාකාර කුට්ටියක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය තුළින් වූ සිරස් හරස්කඩකි. AD හා BC රේඛා සමාන්තර වන අතර AD රේඛාව එය අඩංගු මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවකි. AD අයත් මුහුණත සුමට සිරස් ගොබිම ... ඇතිව කුට්ටිය තබනු ලැබේ. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් A ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා, එයට $\overrightarrow{AB}$ දිගේ u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ; මෙහි $u^2 = \frac{7ga}{3}$ වේ. කුට්ටියට සාපේක්ෂව P හි මන්දනය $\frac{2g}{3}$ ... බව පෙන්වා, P අංශුව B කරා ළඟා වන විට, කුට්ටියට සාපේක්ෂව P අංශුවෙහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

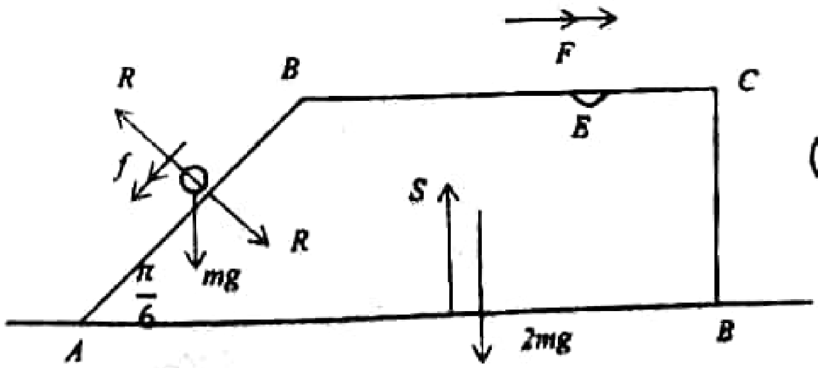
තව ද $BE = \frac{\sqrt{3}a}{2}$ වන පරිදි කුට්ටියෙහි උඩත් මුහුණතෙහි BC මත වූ E ලක්ෂ්‍යයේ කුඩා සිදුරක් ඇත. කුට්ටියට සාපේක්ෂව චලිතය සැලකීමෙන්, P අංශුව E හි ඇති සිදුරට වැටෙන බව පෙන්වන්න.



(b) දිග a වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයකට ද අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ P අංශුවකට ද ඈඳා ඇත. අංශුව O ට සිරස් ව පහළින් තිබියදී එල්ලී සිටින අතර එයට තිරස්ව $u = \sqrt{kag}$ වූ සිරස් ප්‍රවේගයක් දෙනු ලැබේ; මෙහි $2 < k < 5$ වේ. තන්තුව θ කෝණයකින් හැරී තවමත් නොබුරුල්ව තිබෙන විට අංශුවේ v වේගය $v^2 = (k-2)ag + 2ag\cos\theta$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

මෙම පිහිටීමේ දී තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.

$\theta = \alpha$ වන විට තන්තුව බුරුල් වන බව අපෝහනය කරන්න; මෙහි $\cos\alpha = \frac{2-k}{3}$ වේ.



10

$\underline{a}(P,W) = f$ ↙ $\quad\quad$ $\underline{a}(W,E) = F$ → $\quad\quad$ 5

$\underline{F} = m\underline{a}$

පද්ධතියට → $\quad 0 = m\left(-f\cos\frac{\pi}{6} + F\right) + 2mF \quad\quad$ 15

5

Scanned by CamScanner

$$0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} f + 3F \Rightarrow \frac{\sqrt{3}f}{6} = F \qquad 5$$

P සඳහා $\swarrow$ $\quad mg\cos\frac{\pi}{3} = m\left(f - F\cos\frac{\pi}{6}\right) \qquad 10$

$$\frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}f}{2} \Rightarrow \frac{g}{2} = f - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6} f \qquad 5$$

$$\Rightarrow f = \frac{2g}{3}. \qquad 5$$

කුට්ටියට සාපේක්ෂව B ලක්ෂ්‍යයේදී අංශුවේ ප්‍රවේගය වලිතය v යැයි ගනිමු.

$v^2 = u^2 + 2as$ භාවිතයෙන්

$$v^2 = u^2 - 2\left(\frac{2g}{3}\right)a \qquad 5$$

$$= \frac{7ga}{3} - \frac{4ga}{3}$$

$$v = \sqrt{ga} \qquad 5$$

65

AB මුහුණතින් ඉවත්වීමෙන් පසු, කුට්ටියට සාපේක්ෂව අංශුවේ චලිතය සඳහා

$$\underline{a}(P,W) = \underline{a}(P,E) + \underline{a}(E,W)$$

$= \downarrow g + \underline{0}$ (∵ කුට්ටිය නියත ප්‍රවේගයෙන් චලිත වන බැවින්)

$$= \downarrow g \qquad 10$$

කුට්ටියේ උඩත් මුහුණතට නැවත ළඟා වීමට P අංශුව ගනු ලබන කාලය t යැයි ගනිමු.

$S = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

ඒවට $\uparrow$ $\quad 0 = v\sin\frac{\pi}{6}t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad 5$

$$= \frac{v}{2}t - \frac{1}{2}gt^2$$

$$\Rightarrow t = \frac{v}{g} = \sqrt{\frac{a}{g}}. \qquad 5$$

R යනු කුට්ටියේ උඩත් මුහුණත මත තිරස් සාපේක්ෂ විස්ථාපනය යැයි ගනිමු.

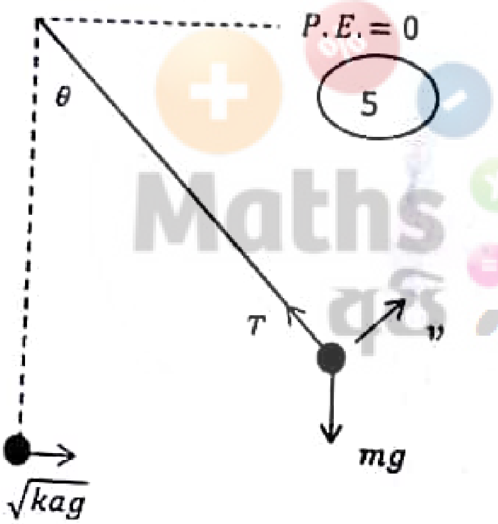
$R = v \cos\frac{\pi}{6} \cdot t$ 5

$R = v \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}} = \sqrt{ga} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{\frac{a}{g}}$

$\therefore R = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. 5

එබැවින් P අංශුව E හි සිදුරට වැටේ. $\boxed{30}$

(b)



ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්:

$-mga + \frac{1}{2}m(kag) = -mga\cos\theta + \frac{1}{2}mv^2$ 15

$\Rightarrow v^2 = -2ga + kag + 2ag\cos\theta$

$v^2 = (k-2)ag + 2ag\cos\theta$ 5 $\boxed{25}$

$\nwarrow \; F = ma$

$T - mg\cos\theta = \frac{mv^2}{a}$ 10

$\Rightarrow T - mg\cos\theta + \frac{m}{a}[(k-2)ag + 2ag\cos\theta]$

ආතතිය: $T = (k-2)mg + 3mg\cos\theta$. 5

θ වැඩිවන විට v හා T දෙකම අඩුවේ.

$T = mg(3\cos\theta - 2 + k)$

5 $T = 0$ විට $3\cos\theta - 2 + k = 0$

i.e. $\cos\theta = \frac{2-k}{3}$. 5

එනම් $\cos\theta = \frac{2-k}{3}$,

$$v^2 = (k-2)ag + 2ag\frac{(2-k)}{3}$$

$$= \frac{ag}{3}(k-2) > 0 \text{ as } k > 2.$$ 5

එමනිසා තන්තුව බුරුල් වන්නේ, $\cos\alpha = \frac{2-k}{3}$ $(2 < k < 5)$ වූ $\theta = \alpha$ විටය.

$\cos\alpha = \frac{2-k}{3}$ $(2 < k < 5)$.

$\boxed{30}$

13. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එක එකෙහි ස්වාභාවික දිග a හා මාපාංකය mg වූ සමාන සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තු දෙකක කෙළවරවල් දෙකකට ඈඳා ඇත. එක් තන්තුවක නිදහස් කෙළවර A අචල ලක්ෂ්‍යයකට හා අනෙක් තන්තුවේ නිදහස් කෙළවර A ට සිරස් ව පහළින් $4a$ දුරකින් පිහිටි B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. (රූපය බලන්න.) තන්තු දෙකම නොබුරුල්ව, A ට $\frac{5a}{2}$ දුරක් පහළින් අංශුව සමතුලිතව තිබෙන බව පෙන්වන්න.

P අංශුව දැන්, AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයට ඔසවා එම පිහිටීමේ දී නිශ්චලතාවේ සිට සීරුවෙන් මුදාහරිනු ලැබේ. තන්තු දෙකම නොබුරුල් ව AP තන්තුවේ දිග x වන විට, $\ddot{x} + \frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right) = 0$ බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණය $\ddot{X} + \omega^2 X = 0$ ආකාරයෙන් නැවත ලියන්න; මෙහි $X = x - \frac{5a}{2}$ හා $\omega^2 = \frac{2g}{a}$ වේ.

$\dot{X}^2 = \omega^2(c^2 - X^2)$ සූත්‍රය භාවිතයෙන් මෙම චලිතයේ විස්තාරය c සොයන්න.

P අංශුව එහි පහත් ම පිහිටීමට ළඟා වන මොහොතේ දී PB තන්තුව කපනු ලැබේ. නව චලිතයේ දී $x = a$ වන විට අංශුව එහි උච්චතම පිහිටීමට ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

P අංශුව $x = 2a$ හි වූ එහි ආරම්භක පිහිටීමේ සිට පහළට a දුරක් ද ඊළඟට ඉහළට $\frac{a}{2}$ දුරක් ද චල විමට ගත වන මුළු කාලය $\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}}\left(3 + \sqrt{2}\right)$ බව තව දුරටත් පෙන්වන්න.

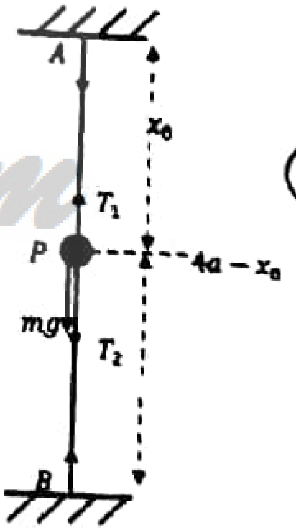
සමතුලිත පිහිටීමේ දී, $x = x_0$ යයි ගනිමු.

එවිට $\uparrow T_1 = T_2 + mg$ (5)

$$\frac{mg}{a}(x_0 - a) = \frac{mg}{a}(4a - x_0 - a) + mg$$ (5)

$$x_0 - a = 3a - x_0 + a$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{5a}{2}.$$ (5)



(5)

20

P සඳහා $\downarrow$ $\underline{F} = m\underline{a}$ යෙදීමෙන්

$$T_2' + mg - T_1' = m\ddot{x}$$ (5)

$$\frac{mg}{a}(4a - x - a) + mg - \frac{mg}{a}(x - a) = m\ddot{x}$$ (10)

$$\Rightarrow \ddot{x} = -\frac{2g}{a}\left(x - \frac{5a}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}+\frac{2g}{a}\left(x-\frac{5a}{2}\right)=0.$$ 5

එවිට $X=x-\frac{5a}{2}$ හා $\omega^2=\frac{2g}{a}$

$\ddot{X}+\omega^2 X=0.$ 5

සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය වන්නේ $x=\frac{5a}{2}$. 5

$\dot{X}^2=\omega^2(c^2-X^2)$, මෙහි c යනු විස්තාරයයි.

$X=-\frac{a}{2}$ විට $\dot{X}=0$ වේ. 5

$0=\omega^2\left(c^2-\frac{a^2}{4}\right)$ $\quad c=\frac{a}{2}$ 10

$\therefore$ පහත්ම පිහිටීම $X=\frac{a}{2} \Rightarrow x=3a$. 5

$\boxed{50}$

PB තන්තුව කැඩීමෙන් පසු

$\downarrow$ $\underline{F}=m\underline{a}$

$mg-T=m\ddot{x}$

$mg-\frac{mg}{a}(x-a)=m\ddot{x}$ 5

$\ddot{x}+\frac{g}{a}(x-2a)=0 \Rightarrow$ 5 $\quad \ddot{Y}+\Omega^2 Y=0$, මෙහි $Y=x-2a$ හා $\Omega^2=\frac{g}{a}$. 5 5

නව සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය $x=2a$.

$\dot{Y}^2=\Omega^2(b^2-Y^2)$, මෙහි b යනු විස්තාරයයි. 5

PB තන්තුව කැඩීමෙන් මොහොතකට පසු , $\dot{Y}=0$ හා $x=3a$ 5

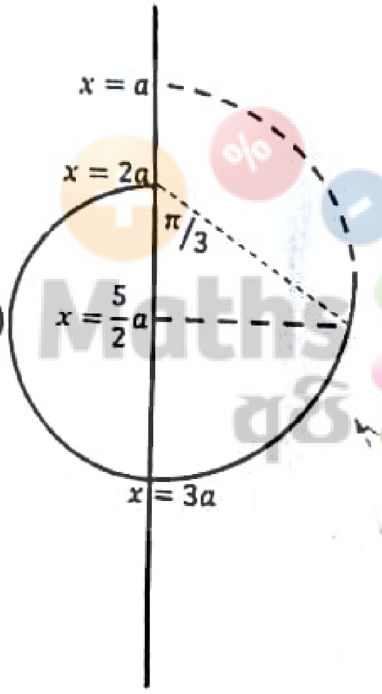
$\Rightarrow \dot{Y}=0$ at $Y=a$. 5

නව සරල අනුවර්තීය චලිතයේ විස්තාරය a වේ.

නැවත $\therefore \dot{Y}=0$ වන්නේ $Y=-a \Rightarrow x=a$ වන විටදීය. 5

එනම් $x=a$ වන විටදීය.

එනම් අංශුව $x=a$ හිදී උච්චතම පිහිටීමට පැමිණෙයි. 5



5 10

$x=2a$ සිට $x=3a$ දක්වා කාලය $\frac{\pi}{\omega}=\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}$ 5

$x=3a$ සිට $x=\frac{5a}{2}$ දක්වා කාලය $=\frac{\pi}{3\Omega}=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$. 10

සම්පූර්ණ කාලය $=\pi\sqrt{\frac{a}{2g}}+\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{g}}$ 5

$=\frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{a}{2g}}(3+\sqrt{2})$. 5

14 (a) OAB ත්‍රිකෝණයක් යැයි ද D යනු AB හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද E යනු OD හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. F ලක්ෂ්‍යය OA මත පිහිටා ඇත්තේ $OF : FA = 1 : 2$ වන පරිදි ය. O අනුබද්ධයෙන් A හා B හි පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ වේ. $\overrightarrow{BE}$ හා $\overrightarrow{BF}$ දෛශික $\mathbf{a}$ හා $\mathbf{b}$ ඇසුරෙන් ප්‍රකාශ කරන්න.

B, E හා F ඒකරේඛීය බව අපෝහනය කර, $BE : EF$ අනුපාතය සොයන්න.

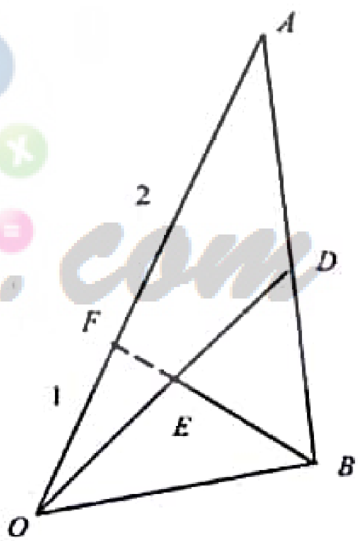
$\overrightarrow{BF} \cdot \overrightarrow{DF}$ අදිශ ගුණිතය $|\mathbf{a}|$ හා $|\mathbf{b}|$ ඇසුරෙන් සොයා, $|\mathbf{a}| = 3|\mathbf{b}|$ නම්, $\overrightarrow{BF}$ යන්න $\overrightarrow{DF}$ ට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.

(b) Oxy තලයේ වූ බල පද්ධතියක් පිළිවෙළින් $(-a, 2a)$, $(0, a)$ හා $(-a, 0)$ ලක්ෂ්‍යවල දී ක්‍රියාකරන $3P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$, $2P\mathbf{i} - P\mathbf{j}$ හා $-P\mathbf{i} + 2P\mathbf{j}$ යන බල තුනකින් සමන්විත වේ; මෙහි P හා a යනු පිළිවෙළින් නිව්ටන හා මීටරවලින් මනින ලද ධන රාශි වේ. O මූලය වටා, පද්ධතියේ දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය, $12Pa$ Nm බව පෙන්වන්න.

තව ද පද්ධතිය, විශාලත්වය $5P$ N වූ තනි සම්ප්‍රයුක්ත බලයකට තුල්‍ය වන බව පෙන්වා, එහි දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

දැන්, අතිරේක බලයක් පද්ධතියට ඇතුළත් කරනු ලබන්නේ නව පද්ධතිය දක්ෂිණාවර්ත ඝූර්ණය $24Pa$ Nm වූ යුග්මයකට තුල්‍ය වන පරිදි ය. අතිරේක බලයෙහි විශාලත්වය, දිශාව හා ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය සොයන්න.

(a) $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$, $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$



$\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}\underline{a}$

$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b})$ 5

$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b})$

$\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{4}(\underline{a} + \underline{b}) - \underline{b} = \frac{1}{4}(\underline{a} - 3\underline{b})$

5 5

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}\underline{a} - \underline{b} = \frac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b})$ 5

$\Rightarrow 4\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BF}$ 5

B, E, F ඒක රේඛීය වේ සහ $BE : EF = 3 : 1$

5

$\boxed{30}$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OD} = \frac{1}{3}\underline{a} - \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{b}) = -\frac{1}{6}(\underline{a} + 3\underline{b})$$

$$\overrightarrow{BF}.\overrightarrow{DF} = \tfrac{1}{3}(\underline{a} - 3\underline{b}) \cdot \tfrac{1}{6}(-\underline{a} - 3\underline{b})$$

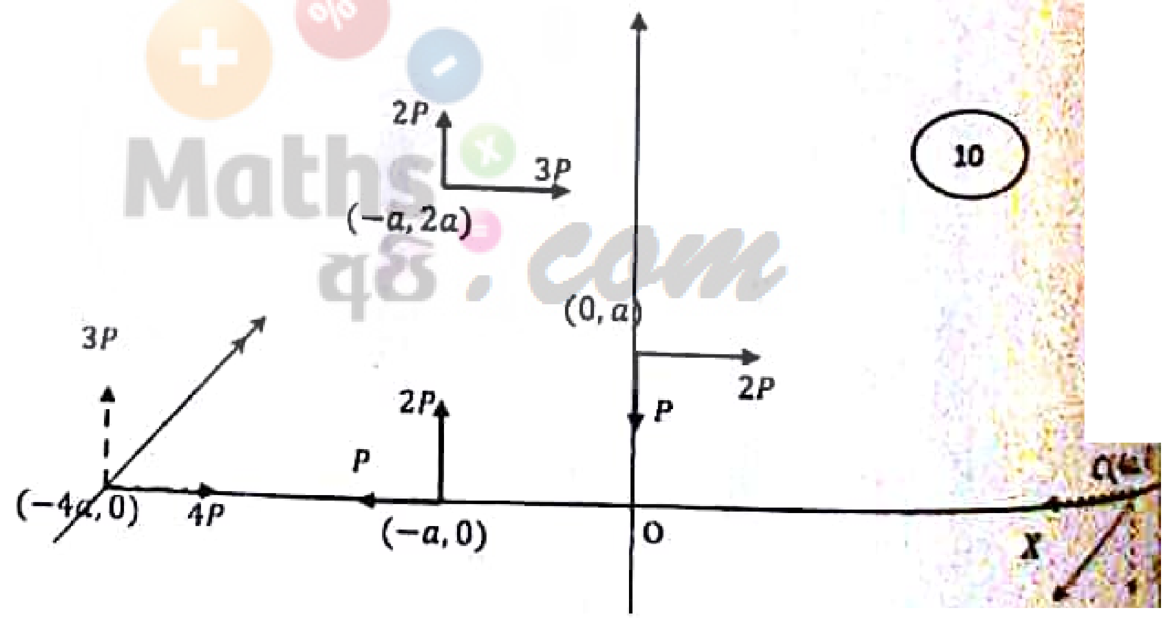
5

$$= -\tfrac{1}{18}\left(|\underline{a}|^2 - 9|\underline{b}|^2\right) = 0 \text{ , (} |a| = 3|b| \text{ බැවින්)}$$

∴ ඒවා නිශ්ශූන්‍ය බැවින් $\overrightarrow{BF} \perp \overrightarrow{DF}$

5

(b)



10

$O \curvearrowright$ වටා වාමාවර්තව ඝූර්ණ ගැනීමෙන්

$G = 2P.a + 3P.2a + 2P.a + 2P.a = 12P.a$. Nm;

10

විභේදනයෙන් $\rightarrow \quad X = 3P + 2P - P = 4P$ 5

$\uparrow \quad Y = 2P + 2P - P = 3P$ 5

R සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය $5P$ මගින් දෙනු ලැබේ.

$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 5P\ N$ 5

Y ක්‍රියා රේඛාව x − අක්ෂය සමඟ θ කෝණයක් සාදයි, මෙහි $\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{3}{4}$. 5

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව $(-b, 0)$, $(b > 0)$ ලක්ෂ්‍යයේ දී x − අක්ෂය හමුවේ නම් එවිට

$O \curvearrowright$

$Y b = 3P b = 12P a \Longrightarrow \quad b = 4a$ 5 5

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවේ සමීකරණය

$$y - 0 = \frac{3}{4}(x + 4a) \Longrightarrow 4y - 3x = 12a$$

10

$\boxed{60}$

දැන් $C \equiv (c, 0)$, $c > 0$ ලක්ෂ්‍යයේ දී $(-4P, -3P)$ බලයක් යෙදීමෙන් සමස්ත පද්ධතිය යුග්මයකට ඌනනය වේ. 5

$C \curvearrowright \quad 3P(c + 4a) = 24Pa$ 10

$\Rightarrow c = 4a$

5 5

අමතර බලයේ විශාලත්වය $= 5PN$, සහ එහි දිශාව x- අක්ෂයේ ඍණ දිශාව සමඟ

5

$\tan^{-1}\left(\frac{-3P}{-4P}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ කෝණයක් සාදයි.

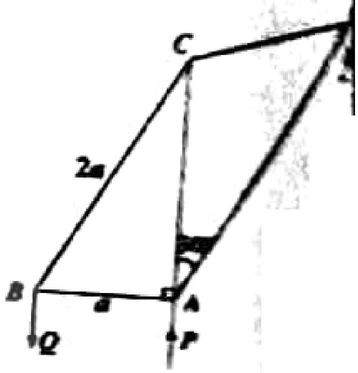
අමතර බලයේ ක්‍රියා රේඛාව $y - 0 = \frac{3}{4}(x - 4a)$ 10

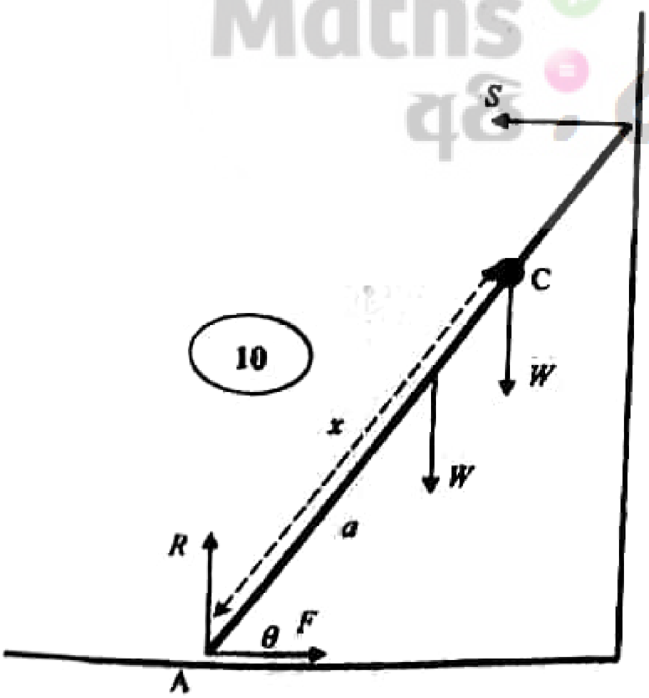
$\Rightarrow 4y - 3x + 12a = 0.$

$\boxed{40}$

18 (a) බර W හා දිග $2a$ වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර රළු තිරස් බිමක් මත හා B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව තබා ඇත. දණ්ඩ බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටන අතර, එය තිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි; මෙහි $\tan\theta = \frac{3}{4}$ වේ. $AC = x$ වන ලෙස දණ්ඩ මත වූ C ලක්ෂ්‍යයට බර W වූ අංශුවක් සවි කර ඇත. අංශුව සහිත දණ්ඩ සමතුලිතතාවයේ ඇත. දණ්ඩ හා බිම අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය $\frac{5}{6}$ නම් $x \leq \frac{3a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

(b) යාබද රූපයේ පෙන්වා ඇති රාමු සැකිල්ල, AB, BC, AC, CD හා AD සැහැල්ලු දඬු පහක් ඒවායේ කෙළවරවලින් නිදහසේ සන්ධි කර සාදා ඇත. $AB = a$, $BC = 2a$, $AC = CD$ හා $C\hat{A}D = 30°$ බව දී ඇත. බර W වූ භාරයක් D හි එල්ලෙන අතර සැකිල්ල A හා B හි දී පිළිවෙළින් ක්‍රියාකරන P හා Q සිරස් බල ආධාරයෙන් AB තිරස් ව හා AC සිරස් ව රාමු සැකිල්ල සිරස් තලයක සමතුලිතව තිබේ. Q හි අගය W ඇසුරෙන් සොයන්න.
බෝ අංකනය භාවිතයෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, ඒ නයින්, දඬු පහේ ප්‍රත්‍යාබල සොයා, එම ප්‍රත්‍යාබල ආතති ද තෙරපුම් ද යන්න ප්‍රකාශ කරන්න.





AB දණ්ඩට A

$$S \cdot 2a\sin\theta = W(a\cos\theta + x\cos\theta)$$

$$\Rightarrow S \cdot 2a \cdot \frac{3}{5} = W \cdot (a+x) \cdot \frac{4}{5}$$

$$\Rightarrow S = \frac{2W(a+x)}{3a} \quad 5$$

විභේදනයෙන්

$\rightarrow \quad F = S = \frac{2W(a+x)}{3a}$ 5

$\uparrow \quad R = 2W.$ 5

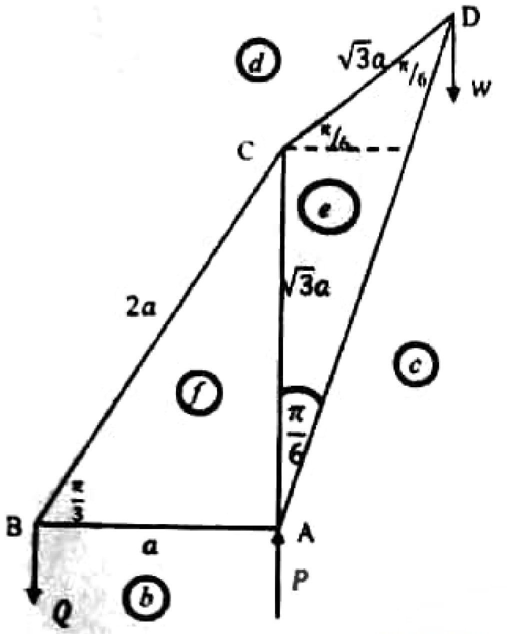
$F \leq \mu R$ හා $\mu = \frac{5}{6}$

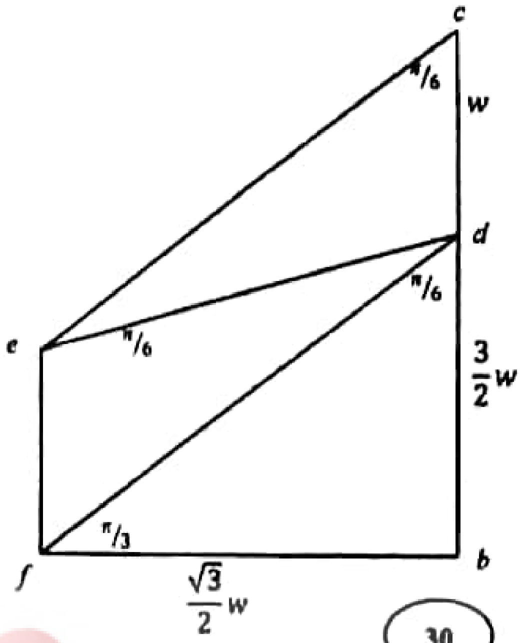
5 $\Rightarrow \frac{2W(a+x)}{3a} \leq \frac{5}{6} \cdot 2W$ 5

$$\Rightarrow a + x \leq \frac{5a}{2}$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{3a}{2}. \quad 5$$

$\tan\theta = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin\theta = \frac{3}{5}$ හා $\cos\theta = \frac{4}{5}$. 5





30

$AD = 2(\sqrt{3}a\cos 30^\circ) = 3a$

A) $Qa = W\,AD\cos 60^\circ$

$\Rightarrow Q = \frac{3}{2}W$ 10

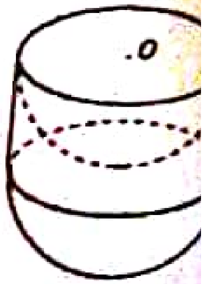
$\uparrow P = Q + W \Rightarrow P = \frac{5}{2}W$

දණ්ඩ	ආතති	තෙරපුම
AB		$\frac{\sqrt{3}}{2}W$
BC	$\sqrt{3}W$	
AC		W
CD	W	
AD		$\sqrt{3}W$

50

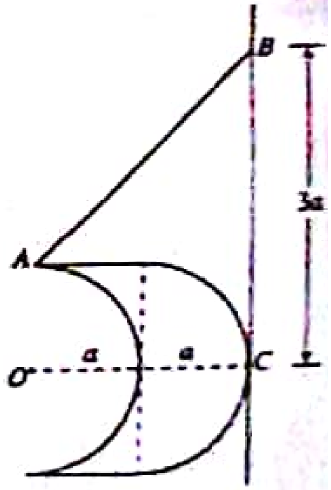
90

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය එහි කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3}{8}a$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

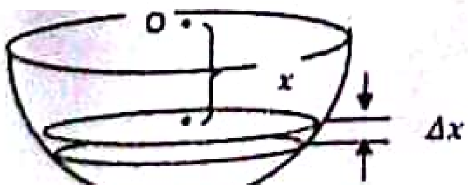


අරය a, උස a හා ඝනත්වය ρ වූ ඒකාකාර ඝන සෘජු වෘත්තාකාර සිලින්ඩරයකින් අරය a වූ අර්ධ ගෝලාකාර කොටසක් කපා ඉවත් කරනු ලැබේ. දැන්, යාබද රූපයේ දැක්වෙන පරිදි සිලින්ඩරයේ ඉතිරි කොටසෙහි වෘත්තාකාර මුහුණතට අරය a හා ඝනත්වය $\lambda\rho$ වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක වෘත්තාකාර මුහුණත සවි කරනු ලබන්නේ, ඒවායේ සමමිතික අක්ෂ දෙක සමපාත වන පරිදි ය. මෙලෙස සාදාගනු ලබන S වස්තුවෙහි ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිතික අක්ෂය මත, තැටියේ O කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{(11\lambda+3)a}{4(2\lambda+1)}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$\lambda = 2$ යැයි ද A යනු S වස්තුවෙහි වෘත්තාකාර ගැට්ට මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු.



මෙම S වස්තුව රළු සිරස් බිත්තියකට එරෙහිව සමතුලිතව තබා ඇත්තේ, A ලක්ෂ්‍යයට හා සිරස් බිත්තිය මත වූ B අචල ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගැසූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. මෙම සමතුලිත පිහිටීමේ දී S හි සමමිතික අක්ෂය බිත්තියට ලම්බව පිහිටන අතර S හි අර්ධ ගෝලාකාර පෘෂ්ඨය B ලක්ෂ්‍යයට $3a$ දුරක් සිරස් ව පහළින් වූ C ලක්ෂ්‍යයේ දී බිත්තිය ස්පර්ශ කරයි. (යාබද රූපය බලන්න.) O, A, B හා C ලක්ෂ්‍ය බිත්තියට ලම්බ සිරස් තලයක පිහිටයි.
μ යනු බිත්තිය හා S හි අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය නම්, $\mu \geq 3$ බව පෙන්වන්න.



සමමිතියෙන් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය G, OA මත පිහිටයි.

$OG = \bar{x}$ [illegible] ρ [illegible]

$$dm = \pi(a^2 - x^2)\,dx\,\rho$$

[illegible]

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\rho x\,dx}{\int_0^a \pi(a^2 - x^2)\rho\,dx} \quad 15$$

$$= \frac{\int_0^a (a^2x - x^3)\,dx}{\int_0^a (a^2 - x^2)\,dx} = \frac{\left(a^2\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^a}{\left(a^2x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^a} \quad 10$$

5

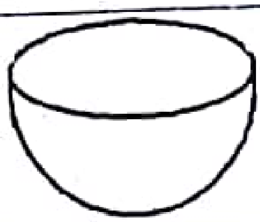
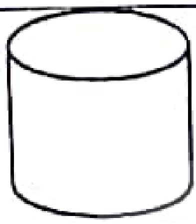
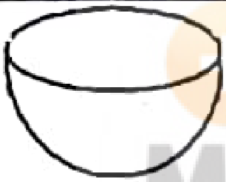
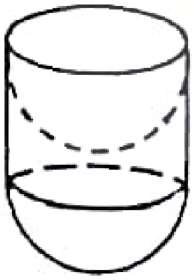
$$= \frac{\left(\frac{a^4}{2} - \frac{a^4}{4}\right)}{\left(a^3 - \frac{a^3}{3}\right)} = \frac{3}{8}a$$

[illegible] O [illegible] $\frac{3}{8}a$ [illegible]. 5 $\boxed{40}$

a

$\pi a^3\rho \cdot a/2 = \frac{2}{3}\pi a^3\rho \times \frac{3}{8} + \pi a^3\rho(1-\frac{2}{3})\bar{x}$

$\bar{x} = 3a/4$

වස්තුව	ස්කන්ධය	O සිට දුර
	$\frac{2}{3}\lambda\pi a^3\rho$ 5	$\frac{11}{8}a$ 5
	$\pi a^3\rho$ 5	$\frac{1}{2}a$ 5
	$\frac{2}{3}\pi a^3\rho$ 5	$\frac{3}{8}a$ 5
	$\left(\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{3}\right)a^3\rho$ 5	$\bar{x}$

සමමිතිය මගින් ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිතික අක්ෂය මත පිහිටයි. 5

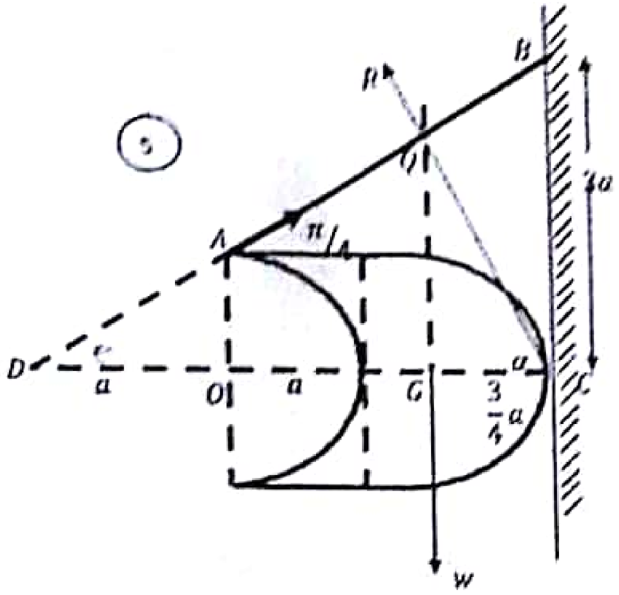
$$\frac{1}{3}(2\lambda+1)\pi a^3\rho\bar{x}_1 = \frac{11}{8}a\times\frac{2}{3}\pi a^3\lambda\rho + \frac{a}{2}\times\pi a^3\rho - \frac{3}{8}a\frac{2}{3}\pi a^3\rho$$

$(\pi a^3\rho - \frac{2}{3}\pi a^3\rho + \frac{2}{3}\pi a^3\rho\lambda)\bar{x} =$

$$\frac{1}{3}(2\lambda+1)\bar{x} = \frac{11}{8}a\times\frac{2\lambda}{3} + \frac{a}{2} - \frac{3a}{8}\times\frac{2}{3}$$

$$= \frac{11\lambda}{12}a + \frac{a}{2} - \frac{a}{4} = \frac{1}{12}(11\lambda+3)a$$

$$\bar{x} = \frac{(11\lambda+3)a}{4(2\lambda+1)} \quad 10$$



$\lambda = 2$ විට $\qquad \bar{x} = \frac{5a}{4}$,

සමතුලිතතාව සඳහා,

$$\mu \geq \tan\alpha = \frac{QG}{GC} = \frac{\frac{5a}{4}}{\frac{3a}{4}} = 3.$$

$\therefore \mu \geq 3.$

5 $\quad$ 5 $\quad$ 10 $\quad$ 5 $\quad$ 5 $\quad$ 35

$R = T\cos\theta$

$T\sin\theta = W - F$

$T\tan\theta = \frac{W - F}{R}$

$F \times 2a - W \times \bar{x} - Ra = 0$

$2F - R = \frac{5W}{4}$

$W(2a - \bar{x}) = R \times 3a$

$R = W/4$

$F = \frac{3W}{4}$

$\lambda = 2$

$\bar{x} = \frac{5a}{4}$

$T \cdot 2a\cos\theta - W(2a - \bar{x}) = 0$

$T = \frac{W}{4\cos\theta}$