ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව
இலங்கைப் பரீட்சைத் திணைக்களம்
Department of Examinations, Sri Lanka

අධ්‍යයන පොදු සහතික පත්‍ර (උසස් පෙළ) විභාගය, 2014 අගෝස්තු
கல்விப் பொதுத் தராதரப் பத்திர (உயர் தர)ப் பரீட்சை, 2014 ஓகஸ்ற்
General Certificate of Education (Adv. Level) Examination, August 2014

සංයුක්ත ගණිතය I
இணைந்த கணிதம் I
Combined Mathematics I

10 S I

B කොටස

※ ප්‍රශ්න **පහකට** පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x)=3x^3+5x^2+ax-1$ යැයි ද ගනිමු. $(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. a හි අගය සොයන්න.

$f(x)$ යන්න $(3x-1)(x+k)^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k යනු නියතයකි.

ඉහත ප්‍රකාශනයෙහි $3x-1$ යන්න b හා c නියත වන $b(x+1)+c$ ආකාරයට ලිවීමෙන්, $f(x)$ යන්න $(x+1)^3$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(b) $a, b, c \in \mathbb{R}$ හා $ac \neq 0$ යැයි ගනිමු. ශූන්‍යය, $ax^2+bx+c=0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ද $\lambda=\frac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda+1)^2=b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.

$p, q, r \in \mathbb{R}$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2+qx+r=0$ සමීකරණයේ මූල γ හා δ යැයි ද $\mu=\frac{\gamma}{\delta}$ යැයි ද ගනිමු. $\lambda=\mu$ හෝ $\lambda=\frac{1}{\mu}$ වන්නේ $acq^2=prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$kx^2-3x+2=0$ හා $8x^2+6kx+1=0$ සමීකරණවල මූල එක ම අනුපාතයට වන බව දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයන්න.

12. (a) පාසල් හයක් තරුණ ක්‍රීඩා සමුළුවකට සහභාගී වන අතර, ක්‍රිකට් ක්‍රීඩකයකුගෙන්, පාපන්දු ක්‍රීඩකයකුගෙන් හා හොකී ක්‍රීඩකයකුගෙන් සමන්විත ක්‍රීඩකයින් තුන්දෙනකුගෙන් එක් එක් පාසල නියෝජනය කරනු ලබයි. මෙම ක්‍රීඩකයින් අතුරෙන් සාමාජිකයින් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

(i) එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

(ii) පාසල් හය ම නියෝජනය වන පරිදි, එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

(iii) පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ද ඉතිරි පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක ක්‍රීඩකයකු බැගින් ද ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

මෙම කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(b) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r=\dfrac{r^2-r-5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$ යැයි ගනිමු.

$n=0,1,2,3$ සඳහා r^n හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $r^2-r-5=A(r^2-1)(r+5)-Br^2(r+4)$ වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r=f(r)-f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n}U_r=-\frac{n}{(n+1)(n+5)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty}U_r$ අනන්ත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=3}^{\infty}3U_r$ සොයන්න.

13. (*a*) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ වන පරිදි a හා b හි අගයන් සොයන්න; මෙහි $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ මගින් $\mathbf{A}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ.

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $u \in \mathbb{R}$ වේ. $\mathbf{CX} = \lambda\mathbf{BX}$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. λ හි අගය හා u හි අගය සොයන්න.

λ හි මෙම අගය සඳහා $\mathbf{C} - \lambda\mathbf{B}$ න්‍යාසය සොයා, එහි ප්‍රතිලෝමය **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

(*b*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $|1-z|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,z + |z|^2$ බව හා

(ii) $z \neq 1$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1-\mathrm{Re}\,z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ වන්නේ $|z| = 1$ හා $z \neq 1$ ම නම් පමණක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

S යනු, $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ හා $-\dfrac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}\,z < \dfrac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතා දෙක ම සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු. S හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

z යන්න S තුළ වේ නම් හා $\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, $z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

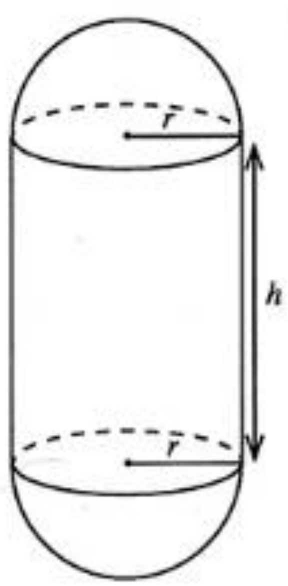
14. (*a*) $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $(x+1)(x^2+3) = 16x$ සමීකරණයේ විසඳුම් **ගණන** සොයන්න.

(*b*) අරය මීටර r වූ කුහර අර්ධ ගෝල දෙකක්, එම අරය ම සහිත උස මීටර h වූ සෘජු වෘත්ත කුහර සිලින්ඩරයකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කිරීමෙන් කුහර සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදිය යුතු වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව 36π m^3 වේ. $h = \dfrac{108 - 4r^3}{3r^2}$ බව පෙන්වන්න.



ද්‍රව්‍ය සඳහා යන වියදම සිලින්ඩරාකාර පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 300 ක් ද අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨ සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 1000 ක් ද වේ. මෙම සංයුක්ත වස්තුව සෑදීමට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම රුපියල් C යන්න $0 < r < 3$ සඳහා $C = 800\pi\left(4r^2 + \dfrac{27}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

C අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

15.(a) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(b) **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** භාවිතයෙන් $\int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න; මෙහි a යනු නියතයකි.

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$ යැයි ද $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ යැයි ද ගනිමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ බව පෙන්වන්න.

I සඳහා වූ ඉහත අනුකල දෙක භාවිතයෙන් $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $I = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

16. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $2x+y=5$ හා $x+2y=4$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වා, මෙම කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය සොයන්න.

l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය A යැයි ද $R=\left\{(x,y): x+2y \le 4 \text{ හා } 2x+y \ge 5\right\}$ යැයි ද ගනිමු. A ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයා, R පෙදෙස xy- තලයෙහි අඳුරු කරන්න.

l_1 හා l_2 රේඛා දෙක ම ස්පර්ශ කරමින් R පෙදෙසෙහි පිහිටන අරය $\sqrt{5}$ ක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2+y^2-14x+8y+60=0$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ ජ්‍යාය සඳහා සුපුරුදු සූත්‍රය භාවිතයෙන්, A ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය $x-y=10$ බව පෙන්වන්න.

A ලක්ෂ්‍යය ද l_1 හා l_2 සමග S හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ද ඔස්සේ යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

17.(a) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $A\cos(2x+\alpha)+B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $A\,(>0)$, B හා $\alpha \left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන්න $2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $k=2-\sqrt{2}$ වේ.

$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

තව ද $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y=2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(b) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a:b:c=1:\lambda:\mu$ බව දී ඇත; මෙහි λ හා μ යනු නියත වේ. $\mu^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C) = 4\lambda\,\sin^3 C$ බව පෙන්වන්න.

* * *