අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2014

ඇගයීම් වාර්තාව

10 - සංයුක්ත ගණිතය

පර්යේෂණ හා සංවර්ධන ශාඛාව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව,
ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව.

2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

10 - සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. **ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය** භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} r(3r-1) = n^2(n+1)$ බව සාධනය කරන්න.

$n=1$ විට,   ව. පැ. $= \sum_{r=1}^{1} r(3r-1) = 2$ හා

ද. පැ. $= 1^2(1+1) = 2$.

එනයින් $n=1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම $k \in \mathbb{Z}^+$ ගෙන, $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $\sum_{r=1}^{k} r(3r-1) = k^2(k+1)$ වේ. 5

දැන්, $\sum_{r=1}^{k+1} r(3r-1) = \sum_{r=1}^{k} r(3r-1) + (k+1)[3(k+1)-1]$

5

$$= k^2(k+1) + (k+1)(3k+2) \quad \text{(අභ්‍යුහනය කල්පිතයෙන්)}$$
$$= (k+1)[k^2+3k+2]$$
$$= (k+1)^2(k+2) \quad 5$$
$$= (k+1)^2[(k+1)+1]$$

එනයින් $n=k$ සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ නම්, $n=k+1$ සඳහාද ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ

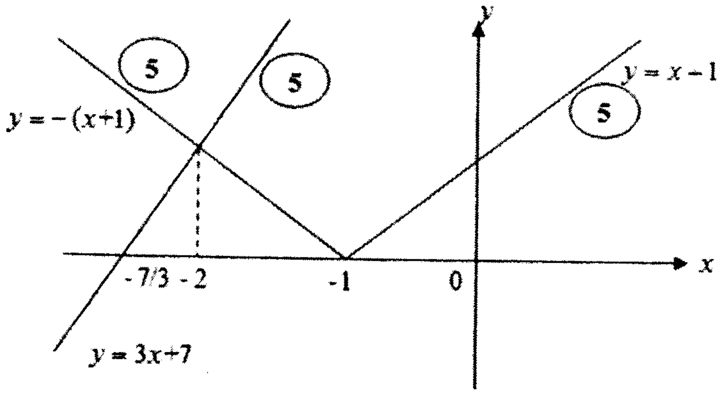
එබැවින් ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය මගින් ප්‍රතිඵලය සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා ම සත්‍ය වේ.

5      $\boxed{25}$

2 වන ප්‍රශ්නය

2. ප්‍රස්තාරික ක්‍රමයක් භාවිතයෙන් හෝ අන් අයුරකින් හෝ, $|x+1|>3x+7$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගයන් සොයන්න.

(I ක්‍රමය)



ඡේදන ලක්ෂයයේදී, $-x-1=3x+7$ විය යුතු බැවින් එහිදී $x=-2$ විය යුතුය. 5

එබැවින් විසඳුම් කුලකය = $\{x\in\mathbb{R}: x<-2\}$ 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

(i) අවස්ථාව $\boxed{x\le -1}$ මෙම අවස්ථාවේදී $|x+1|>3x+7$

$\Leftrightarrow -(x+1)>3x+7$ 5 $\Leftrightarrow x<-2.$ 5

එබැවින් මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් $x<-2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ.

(ii) අවස්ථාව $\boxed{x>-1}$ මෙම අවස්ථාවේ දී $|x+1|>3x+7$

$\Leftrightarrow x+1>3x+7$ 5

$\Leftrightarrow \quad x<-3$ 5

මෙම විසංවාදයෙන්, මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් නොමැති බව ගම්‍ය වේ.

එබැවින් විසඳුම් කුලකය= $\{x\in\mathbb{R}: x<-2\}$. 5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

(i) අවස්ථාව $\boxed{x\le -\frac{7}{3}}$

මෙම අවස්ථාවේදී $3x+7\le 0$ බැවින් $|x+1|>3x+7$ යන්න $x\le -\frac{7}{3}$ තෘප්ත කරන සියලු x අගයන් ගෙන් තෘප්ත වේ. 5

(ii) අවස්ථාව $\boxed{x>-\frac{7}{3}}$

මෙම අවස්ථාවේදී $|x+1|>3x+7$

$\Leftrightarrow (x+1)^2>(3x+7)^2$ 5

$\Leftrightarrow 8x^2+40x+48<0 \Leftrightarrow (x+2)(x+3)<0 \Leftrightarrow -3<x<-2$ 5

මෙම අවස්ථාවේදී විසඳුම් $-\frac{7}{3}<x<-2$ තෘප්ත කරන x අගයන් වේ. 5

අගයන් දෙකම සැලකීමෙන්, විසඳුම් කුලකය= $\{x\in\mathbb{R}: x<-2\}$. 5

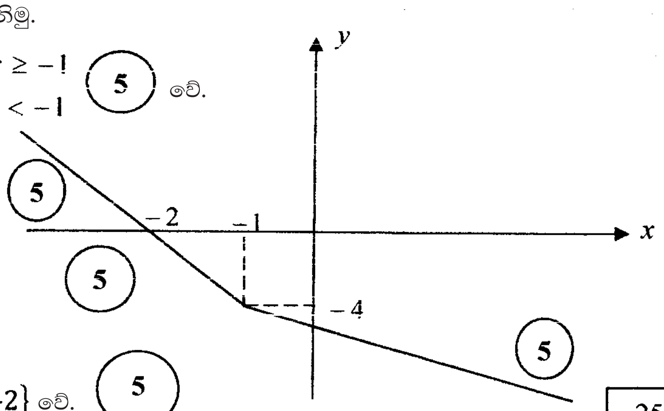
25

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

$|x+1| > 3x+7$ අසමානතාව $|x+1|-(3x+7) > 0$ යන්නට තුල්‍ය වේ.

$y = |x+1|-(3x+7)$ යැයි ගනිමු.

එවිට $y = \begin{cases} -2x-6 & , x \geq -1 \\ -4x-8 & , x < -1 \end{cases}$ 5 වේ.



විසඳුම් කුලකය $= \{x \in \mathbb{R} : x < -2\}$ වේ. 5

25

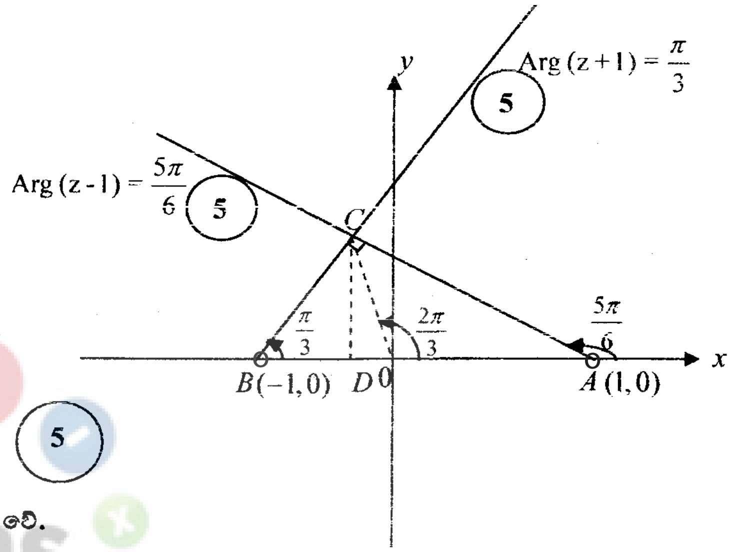
3 වන ප්‍රශ්නය

3. එක ම ආගන්ඩ් සටහනක

(i) $\text{Arg}(z+1)=\dfrac{\pi}{3}$,

(ii) $\text{Arg}(z-1)=\dfrac{5\pi}{6}$

සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා මගින් නිරූපණය කරනු ලබන ලක්ෂ්‍යයන්හි පථවල දළ සටහන් ඇඳ, ඒවායේ **ඡේදන ලක්ෂ්‍යය මගින් නිරූපණය කරනු ලබන සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව සොයන්න.**



අවශ්‍ය සංකීර්ණ සංඛ්‍යාව Z_C යැයි ගනිමු.

$A\hat{C}B=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ වේ. 5

$AB=2$ බැවින්, එවිට $BC=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$ වේ.

දැන් $CD=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ හා $BD=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ වේ. 5 හෝ $\left[\;z+1=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right]$

$\therefore z_c=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 5

$\boxed{25}$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

5

$A\hat{C}B=\dfrac{5\pi}{6}-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{2}$ වේ. එබැවින්, කේන්ද්‍රය O ද අරය 1 ක්ද වූ වෘත්තය මත C පිහිටයි.

$\therefore A\hat{O}C=\dfrac{2\pi}{3}$ හා එනයින් $z_c=\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ වේ.

5 5

$\boxed{15}$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

AC හා BC හි සමීකරණ පිළිවෙලින් $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-1)$ හා $y=\sqrt{3}(x+1)$ වේ. 5

ඒවා විසඳීමෙන්, $x=-\dfrac{1}{2}$ හා $y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ ලැබේ. 5

$\therefore z_c=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. 5

$\boxed{15}$

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $n\in\mathbb{Z}^+$ යැයි ගනිමු. $\left(2+\dfrac{3}{x}\right)(1+x)^n$ හි ප්‍රසාරණයේ x^{n-2} හි සංගුණකය 120 වේ. n හි අගය සොයන්න.

සුපුරුදු අංකනයෙන් $\left(2+\dfrac{3}{x}\right)(1+x)^n=\left(2+\dfrac{3}{x}\right)\displaystyle\sum_{r=0}^{n}{}^{n}C_r x^r$ 5

x^{n-2} හි සංගුණකය 120 බව දී ඇති බැවින්,

5 $2\ {}^{n}C_{n-2}+3\ {}^{n}C_{n-1}=120$ විය යුතුය.

5

එනම් $2\dfrac{n!}{(n-2)!\,2!}+3\dfrac{n!}{(n-1)!\,1!}=120.$

$\Leftrightarrow n(n-1)+3n=120$ 5 5

$\Leftrightarrow n^2+2n-120=0 \Leftrightarrow (n+12)(n-10)=0 \Leftrightarrow n=10 \quad (\because n\in\mathbb{Z}^+)$

$\boxed{25}$

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan^2 2x}{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)}=-8$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)} \quad =\lim_{x\to 0}\frac{\tan^2 2x}{x\left(1-\sqrt{1+x}\right)}\times\frac{\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\left(1+\sqrt{1+x}\right)} \quad 5$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 2x\left(1+\sqrt{1+x}\right)}{\cos^2 2x\,(-x^2)} \quad 5$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)^2\left(\frac{-4}{\cos^2 2x}\right)\left(1+\sqrt{1+x}\right) \quad 5$$

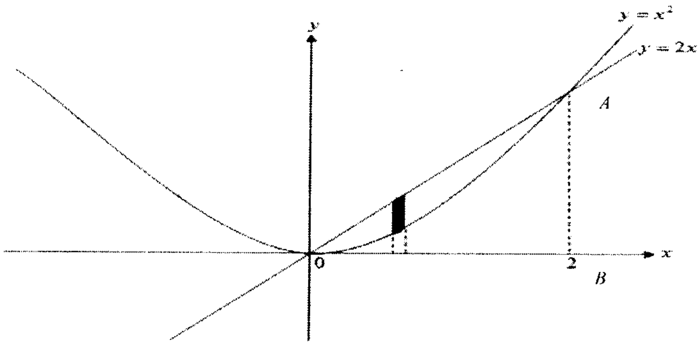
$$=1^2\times\left(\frac{-4}{1}\right)\times 2 \quad =-8$$

5 5

25

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $y = 2x$ සරල රේඛාවෙන් හා $y = x^2$ වක්‍රයෙන් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය සොයන්න.



ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන් හිදී $x^2 = 2x$ විය යුතු බැවින් එම ලක්ෂ්‍යයන් හිදී $x = 0$ හෝ $x = 2$ වේ. 5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය $= \int_0^2 (2x - x^2)dx$ 10

$= \left(x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2$ 5

$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ **වර්ග ඒකක.** 5

$\boxed{25}$

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u> **ඡේදන ලක්ෂ්‍යයන් හිදී $x^2 = 2x$ විය යුතු බැවින් එම ලක්ෂ්‍යයන් හිදී $x = 0$ හෝ $x = 2$ වේ.** 5

අවශ්‍ය වර්ගඵලය = ΔOAB **වර්ගඵලය** $- \int_0^2 x^2 dx$ 10

$= \frac{1}{2} \times 2 \times 4 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2$ 5

$= 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}$ **වර්ග ඒකක.** 5

$\boxed{25}$

7 වන ප්‍රශ්නය

7. $x = e^t + e^{-t}$, $y = e^t - e^{-t}$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු; මෙහි t යනු තාත්ත්වික පරාමිතියකි. t ඇසුරෙන් $\frac{dy}{dx}$ සොයා, $t = \ln 2$ ට අනුරූප ව C මත වූ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී ස්පර්ශ රේඛාවේ සමීකරණය $5x - 3y - 8 = 0$ බව පෙන්වන්න.

$$\left.\begin{aligned} x = e^t + e^{-t} &\Rightarrow \frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t} \\ y = e^t - e^{-t} &\Rightarrow \frac{dy}{dt} = e^t + e^{-t} \end{aligned}\right\} \quad 5$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} \quad 5$$

5

C යනු $t = \ln 2$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. එවිට $C \equiv \left(2 + \frac{1}{2}, 2 - \frac{1}{2}\right)$ වේ.

එනම් $C \equiv \left(\frac{5}{2}, \frac{3}{2}\right)$ වේ. $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$ 5

අවශ්‍ය සමීකරණය $y - \frac{3}{2} = \frac{5}{3}\left(x - \frac{5}{2}\right)$ වේ. 5 එනම් $5x - 3y - 8 = 0$ වේ. $\boxed{25}$

8 වන ප්‍රශ්නය

8. $\lambda \in \mathbb{R}$ හා $\lambda \neq \pm 1$ යැයි ගනිමු. ඛණ්ඩාංක අක්ෂ හා $(1+\lambda)x-2(1-\lambda)y-2(1-\lambda)=0$ සරල රේඛාව මගින් ආවෘත පෙදෙසෙහි වර්ගඵලය වර්ග ඒකක 4 ක් වේ. λ හි අගයන් සොයන්න.

AB රේඛාවේ සමීකරණය $(1+\lambda)x-2(1-\lambda)y-2(1-\lambda)=0$ **වේ.**

එයින් $y=0$ **විට** $x=\dfrac{2(1-\lambda)}{(1+\lambda)}$ **හා** $x=0$ **විට** $y=-1$ **වේ.**

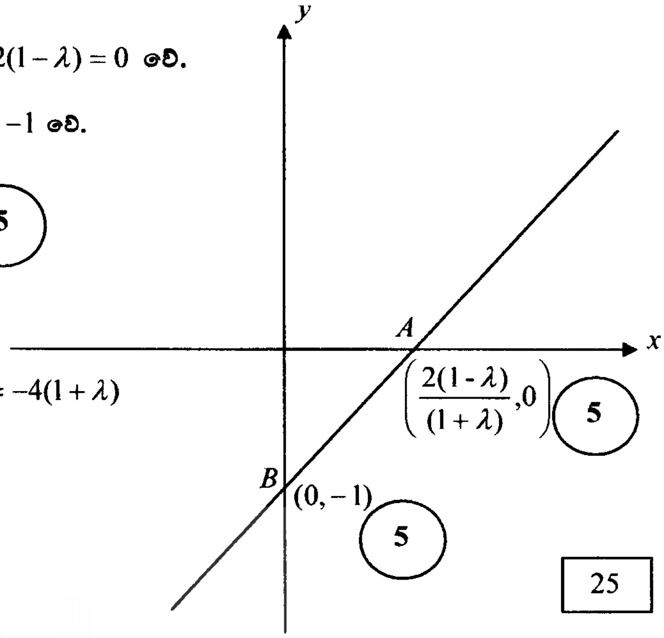
$\therefore$ ΔOAB **හි වර්ගඵලය** $=\dfrac{1}{2}\times 1\times\left|\dfrac{2(1-\lambda)}{1+\lambda}\right|=4$ 5

$\Leftrightarrow \left|\dfrac{(1-\lambda)}{1+\lambda}\right|=4$

$\Leftrightarrow \dfrac{(1-\lambda)}{(1+\lambda)}=\pm 4 \Leftrightarrow 1-\lambda=4(1+\lambda)$ **හෝ** $1-\lambda=-4(1+\lambda)$

$\Leftrightarrow \lambda=-\dfrac{3}{5}$ **හෝ** $\lambda=-\dfrac{5}{3}$.

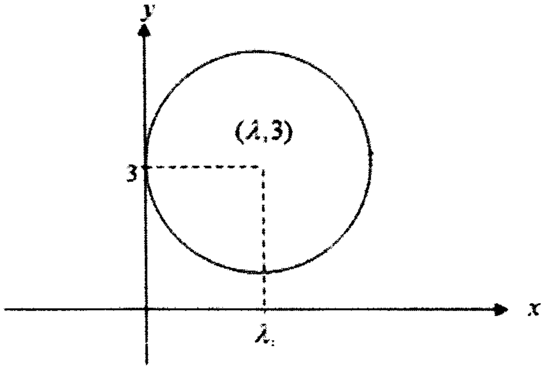
5 5



25

9 වන ප්‍රශ්නය

9. $(0, 3)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි දී y – අක්ෂය ස්පර්ශ කරන්නා වූ ද $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ලෙස ඡේදනය කරන්නා වූ ද වෘත්තයෙහි සමීකරණය සොයන්න.



අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $(x-\lambda)^2 + (y-3)^2 = \lambda^2$ **ලෙස ලිවිය හැකිය.**

එනම් $x^2 + y^2 - 2\lambda x - 6y + 9 = 0.$

කේන්ද්‍රය 5

සමීකරණය 5

මෙය $x^2 + y^2 - 8x + 4y - 5 = 0$ **වෘත්තයට ප්‍රලම්බ බැවින්,**

$2(-4)(-\lambda) + 2(2)(-3) = -5 + 9$ **වේ.** 5

$\Leftrightarrow 8\lambda - 12 = 4 \Leftrightarrow \lambda = 2$ 5

එනයින් අවශ්‍ය වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 9 = 0$ **වේ.** 5

25

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $\tan\alpha = -1$ හා $\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ හා $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$ වේ. $\cos(\alpha+\beta)$ හි අගය සොයන්න.

$\tan\alpha = -1$ **හා** $\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \Rightarrow \alpha = \dfrac{7\pi}{4} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, **හා** $\sin\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 5

$\sin\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **හා** $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi \Rightarrow \cos\beta = -\sqrt{1-\sin^2\beta} = -\dfrac{2}{\sqrt{5}}$. 10

දැන්, $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$ 5

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) - \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{10}} + \frac{1}{\sqrt{10}} \quad = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$ 5

25

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) $a \in \mathbb{R}$ යැයි ද $f(x)=3x^3+5x^2+ax-1$ යැයි ද ගනිමු. $(3x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බව දී ඇත. a හි අගය සොයන්න.

$f(x)$ යන්න $(3x-1)(x+k)^2$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි k යනු නියතයකි.

ඉහත ප්‍රකාශනයෙහි $3x-1$ යන්න b හා c නියත වන $b(x+1)+c$ ආකාරයට ලිවීමෙන්, $f(x)$ යන්න $(x+1)^3$ න් බෙදූ විට ශේෂය සොයන්න.

(*b*) $a, b, c \in \mathbb{R}$ හා $ac \neq 0$ යැයි ගනිමු. ශූන්‍යය, $ax^2+bx+c=0$ සමීකරණයෙහි මූලයක් **නොවන** බව පෙන්වන්න.

මෙම සමීකරණයේ මූල α හා β යැයි ද $\lambda=\dfrac{\alpha}{\beta}$ යැයි ද ගනිමු. $ac(\lambda+1)^2=b^2\lambda$ බව පෙන්වන්න.

$p, q, r \in \mathbb{R}$ හා $pr \neq 0$ යැයි ගනිමු. තව ද $px^2+qx+r=0$ සමීකරණයේ මූල γ හා δ යැයි ද $\mu=\dfrac{\gamma}{\delta}$ යැයි ද ගනිමු. $\lambda=\mu$ හෝ $\lambda=\dfrac{1}{\mu}$ වන්නේ $acq^2=prb^2$ ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.

$kx^2-3x+2=0$ හා $8x^2+6kx+1=0$ සමීකරණවල මූල එක ම අනුපාතයට වන බව දී ඇත; මෙහි $k \in \mathbb{R}$ වේ. k හි අගය සොයන්න.

(*a*) $f(x)=3x^3+5x^2+ax-1$

$(3x-1)$ **යන්න** $f(x)$ **හි සාධකයක් බැවින්, සාධක ප්‍රමේයයෙන්,** $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=0.$ 10

දැන්, $f\left(\dfrac{1}{3}\right)=3\times\dfrac{1}{27}+5\times\dfrac{1}{9}+a\times\dfrac{1}{3}-1$ **බැවින්** 10

$1+5+3a-9=0$

$\therefore\ a=1.$ 5 | 25

$f(x)=3x^3+5x^2+x-1=(3x-1)(x^2+2x+1)$ 10

$=(3x-1)(x+1)^2$ 5

මෙය $k=1$ **සහිතව අවශ්‍ය ආකාරයෙන් වේ.** 5 | 20

$3x-1=3(x+1)-4$ 5

මෙය, $b=3$ **හා** $c=-4$ **සහිතව අවශ්‍ය ආකාරයෙන් වේ.**

$\therefore\ f(x)=[3(x+1)-4](x+1)^2=3(x+1)^3-4(x+1)^2$ 5

$\therefore$ **අවශ්‍ය ශේෂය** $=-4(x+1)^2.$ 5 | 15

(*b*) **ශූන්‍යය** $ax^2+bx+c=0$ **හි සාධකයක් ලෙස ගනිමු.**

එවිට, $x=0$ **ආදේශයෙන්,** $c=0$ **ලැබේ.** 5

$ac\neq 0$ **බැවින්, මෙය විසංවාදයකි.**

$\therefore$ **ශූන්‍යය** $ax^2+bx+c=0$ **හි මූලයක් නොවේ.** 5 | 10

එබැවින්, $\alpha \neq 0$ හා $\beta \neq 0$.

තවද, $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ හා $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$. 10

10

දැන්, $\lambda = \dfrac{\alpha}{\beta}$,

$$ac(\lambda+1)^2 = ac\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^2 = \frac{ac}{\beta^2}(\alpha+\beta)^2 = \frac{ac}{\beta^2}\cdot\frac{b^2}{a^2} = b^2\,\frac{c}{a\beta^2} = b^2\,\frac{\alpha\beta}{\beta^2} = b^2\,\frac{\alpha}{\beta} = b^2\lambda$$

5 5 5 5 5

නැත්නම්,

$$\left[\frac{(\lambda+1)^2}{\lambda} = \frac{\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)^2}{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{(\alpha+\beta)^2}{\alpha\beta} = \frac{\frac{b^2}{a^2}}{\frac{c}{a}} = \frac{b^2}{ac} \quad \therefore ac(\lambda+1)^2 = b^2\lambda\right]$$

5 5 5 5 5

$\boxed{45}$

ඉහත පරිදිම, $\gamma \neq 0$ හා $\delta \neq 0$, ද $pr(\mu+1)^2 = \mu q^2$ වේ. 5

$\therefore \dfrac{ac(\lambda+1)^2}{pr(\mu+1)^2} = \dfrac{b^2\lambda}{q^2\mu}$ බැවින්, $acq^2\mu(\lambda+1)^2 = prb^2\lambda(\mu+1)$

$$\therefore\ acq^2 = prb^2 \Leftrightarrow \mu(\lambda+1)^2 = \lambda(\mu+1)^2 \quad 10$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2\mu + 2\lambda\mu + \mu = \lambda\mu^2 + 2\lambda\mu + \lambda$$

$$\Leftrightarrow \lambda\mu(\lambda-\mu) - (\lambda-\mu) = 0 \quad \Leftrightarrow (\lambda-\mu)(\lambda\mu-1) = 0 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow \lambda = \mu \text{ or } \lambda = \frac{1}{\mu}. \quad 5$$

$\boxed{25}$

මූල එකම අනුපාතයට වන්නේ, $\Leftrightarrow \lambda = \mu$ හෝ $\lambda = \dfrac{1}{\mu}$.

$\therefore\ acq^2 = prb^2$ විය යුතුය.

$\therefore\ acq^2 = prb^2$

5

එනම් $2k(6k)^2 = 8 \times 9$ බැවින් $k^3 = 1$ විය යුතුය.

$\therefore k = 1$ 5

$\boxed{10}$

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) පාසල් හයක් තරුණ ක්‍රීඩා සමුළුවකට සහභාගි වන අතර, ක්‍රිකට් ක්‍රීඩකයකුගෙන්, පාපන්දු ක්‍රීඩකයකුගෙන් හා හොකී ක්‍රීඩකයකුගෙන් සමන්විත ක්‍රීඩකයින් තුන්දෙනකුගෙන් එක් එක් පාසල නියෝජනය කරනු ලබයි. මෙම ක්‍රීඩකයින් අතුරෙන් සාමාජිකයින් හයදෙනකුගෙන් යුත් කමිටුවක් තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

(i) එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

(ii) පාසල් හය ම නියෝජනය වන පරිදි, එක් එක් ක්‍රීඩාවෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

(iii) පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයින් දෙදෙනකු බැගින් ද ඉතිරි පාසල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක ක්‍රීඩකයකු බැගින් ද ඇතුළත් කළ යුතු නම්,

මෙම කමිටුව සෑදිය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$ යැයි ගනිමු.

$n = 0, 1, 2, 3$ සඳහා r^n හි සංගුණක සැසඳීමෙන්, $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $r^2 - r - 5 = A(r^2-1)(r+5) - Br^2(r+4)$ වන පරිදි A හා B නියත පවතින බව පෙන්වන්න.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = f(r) - f(r+1)$ වන පරිදි $f(r)$ සොයන්න.

$n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\displaystyle\sum_{r=1}^{n} U_r = -\frac{n}{(n+1)(n+5)}$ බව පෙන්වන්න.

$\displaystyle\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අනන්ත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව තවදුරටත් පෙන්වා, එහි ඓක්‍යය සොයන්න.

ඒ නයින්, $\displaystyle\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r$ සොයන්න.

(a) (i) **අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන** $= {}^6C_2 \times {}^6C_2 \times {}^6C_2 = (15)^3 = 3375.$ 5 10 5 $\boxed{20}$

(ii) **අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන** $= {}^6C_2 \times {}^4C_2 \times {}^2C_2 = 90$ 10 5 $\boxed{15}$

(iii) **පාසැල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් ක්‍රීඩකයන් දෙදෙනෙකු බැගින් තේරිය හැකි වෙනස් ක්‍රම ගණන** $= {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2$ 10

ඉතිරි පාසැල් දෙකකින් එක් එක් පාසලෙන් එක් ක්‍රීඩකයෙකු බැගින් තේරිය හැකි වෙනස් ක්‍රම ගණන

$= {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1$ 10

අවශ්‍ය ක්‍රම ගණන $= {}^6C_2 \times {}^3C_2 \times {}^3C_2 \times {}^4C_2 \times {}^3C_1 \times {}^3C_1 = 7290$ 5

5 $\boxed{30}$

(b) $U_r = \dfrac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)}$

$r^2 - r - 5 = A(r^2-1)(r+5) - Br^2(r+4)$

$\quad = (A-B)r^3 + (5A - 4B)r^2 - Ar - 5A$ 5

දෙපැත්තේ සංගුණක සංසන්දනය කරමු.

r^3 : $0 = A - B$ ....(i)

r^2 : $1 = 5A - 4B$ ....(ii) 10

r^1 : $-1 = -A$ ....(iii)

r^0 : $-5 = -5A$ ....(iv)

දැන් (i) හා (iii) $\Rightarrow A = 1$ හා $B = 1$.

මෙම අගයන්ගෙන් (ii) හා (iv) ද තෘප්ත වේ. 5

එමනිසා දී ඇති අවශ්‍යතාව තෘප්ත කරන පරිදි A හා B නියත පවතී. ඒවායේ අගයන් $A = 1$ හා $B = 1$. 5

$\boxed{25}$

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා

$$U_r = \frac{r^2 - r - 5}{r(r+1)(r+4)(r+5)} = \frac{(r^2-1)(r+5) - r^2(r+4)}{r(r+1)(r+4)(r+5)} \quad 5$$

දැන් , $U_r = \dfrac{r-1}{r(r+4)} - \dfrac{r}{(r+1)(r+5)}$ 5

$= f(r) - f(r+1),$ 5

මෙහි $f(r) = \dfrac{r-1}{r(r+4)}$ 5

$\boxed{20}$

එවිට,

$r = 1$: $U_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$ 5

$r = 2$: $U_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$\vdots$

$r = n-1$: $U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

$r = n$: $U_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$ 5

$$\therefore \sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1) \quad 5 \qquad = -\frac{n}{(n+1)(n+5)} \quad 5$$

$\boxed{20}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{r=1}^{n} U_r = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{-n}{(n+1)(n+5)} = 0$ බැවින් $\sum\limits_{r=1}^{\infty} U_r$ අභිසාරී වේ. 5

එහි එකතුව 0 වේ. 5

$\boxed{10}$

$$\sum_{r=3}^{\infty} 3U_r = 3\left\{\sum_{r=1}^{\infty} U_r - U_1 - U_2\right\} \quad 5$$

$$= 3\{0 - f(1) + f(3)\} = 3 \times \frac{2}{3\times 7} = \frac{2}{7} \quad 5$$

$\boxed{10}$

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ද ගනිමු. $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} = \mathbf{B}$ වන පරිදි a හා b හි අගයන් සොයන්න; මෙහි $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ මගින් $\mathbf{A}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම දැක්වේ.

$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ හා $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු; මෙහි $u \in \mathbb{R}$ වේ. $\mathbf{CX} = \lambda\mathbf{BX}$ යැයි ද ගනිමු; මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ වේ. λ හි අගය හා u හි අගය සොයන්න.

λ හි මෙම අගය සඳහා $\mathbf{C} - \lambda\mathbf{B}$ න්‍යාසය සොයා, එහි ප්‍රතිලෝමය **නොපවතින** බව පෙන්වන්න.

(*b*) $z \in \mathbb{C}$ යැයි ගනිමු.

(i) $|1-z|^2 = 1 - 2\,\mathrm{Re}\,z + |z|^2$ බව හා

(ii) $z \neq 1$ සඳහා $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1-\mathrm{Re}\,z}{|1-z|^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ වන්නේ $|z| = 1$ හා $z \neq 1$ ම නම් පමණක් බව **අපෝහනය** කරන්න.

S යනු, $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) = \dfrac{1}{2}$ හා $-\dfrac{\pi}{3} < \mathrm{Arg}\,z < \dfrac{\pi}{3}$ යන අවශ්‍යතා දෙක ම සපුරාලන z සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවලින් සමන්විත කුලකය යැයි ගනිමු. S හි සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

z යන්න S තුළ වේ නම් හා $\mathrm{Re}\,z + \mathrm{Im}\,z = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ නම්, $z = \cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ බැවින් $A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix}$ 5 වන අතර එනයින්, $A^T A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2+1 \end{pmatrix}$ 10

දැන්, $A^T A - B \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & a^2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow 2 = b$ හා $a^2 + 1 = 1$ 10

$\Leftrightarrow 2 = b$ හා $a = 0$ 5

$\boxed{30}$

$C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ හා $X = \begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix}$ බැවින්

$CX = \begin{pmatrix} 12u+5 \\ 8u+3 \end{pmatrix}$ 5 හා $BX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ u+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3u+1 \\ 2u+1 \end{pmatrix}$ 5

එනයින්, $CX = \lambda BX \Leftrightarrow 12u+5 = \lambda(3u+1)$ හා $8u+3 = \lambda(2u+1)$

$\therefore \dfrac{12u+5}{8u+3} = \dfrac{\lambda(3u+1)}{\lambda(2u+1)}$. 5 5

එම නිසා $24u^2 + 22u + 5 = 24u^2 + 17u + 3 \Rightarrow 5u = -2$

$u = -\dfrac{2}{5}$ 5

එවිට, $-\dfrac{16}{5} + 3 = \lambda\left(-\dfrac{4}{5} + 1\right)$ $\therefore \lambda = -1$ 5

$\boxed{30}$

දැන්, $C - \lambda B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ 5 5

$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 0$ බැවින් $C - \lambda B$ හි ප්‍රතිලෝමය නොපවතී. 5 $\boxed{15}$

<u>**වෙනත් ක්‍රමයක්**</u> දැන්, $C - \lambda B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ 5

$\begin{pmatrix} 9 & 6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ලෙස ගනිමු. 5

$\Leftrightarrow 9p + 6r = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (i)

$9q + 6s = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (ii)

$6p + 4r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (iii)

$6q + 4s = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ (iv)

$\left.\begin{array}{l} \text{(i)} \times \frac{2}{3} \Rightarrow 6p + 4r = \frac{2}{3} \\ \text{(iii)} \Rightarrow 6p + 4r = 0 \end{array}\right\}$ මෙය විසංවාදයකි. 5

එමනිසා $C - \lambda B$ හි ප්‍රතිලෝමය නොපවතී. $\boxed{15}$

(b) (i) $|1 - z|^2 = (1 - z)\overline{(1 - z)}$ 5

$= (1 - z)\,(1 - \bar{z})$ 5

$= 1 - (z + \bar{z}) + z\bar{z} \quad = 1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2$ 5 $\boxed{15}$

(ii) $|z| \neq 1$, සඳහා $\dfrac{1}{1 - z} = \dfrac{1}{(1 - z)} \times \dfrac{\overline{(1 - z)}}{\overline{(1 - z)}} = \dfrac{1 - \bar{z}}{|1 - z|^2}$ 5

$\therefore \operatorname{Re}\dfrac{1}{1 - z} = \dfrac{1 - \operatorname{Re}\bar{z}}{|1 - z|^2} = \dfrac{1 - \operatorname{Re} z}{|1 - z|^2}$ 5 5 5 $\boxed{20}$

<u>**වෙනත් ක්‍රමයක්**</u>

$z = x + iy$ ලෙස ගනිමු. මෙහි $x, y \in \Re$ වේ.

(i) එවිට $1 - z = 1 - x - iy$ 5

$\therefore |1 - z|^2 = (1 - x)^2 + y^2 \quad = 1 - 2x + x^2 + y^2 \quad = 1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2$ 5 5 $\boxed{15}$

(ii) $z \neq 1$, සඳහා $\dfrac{1}{1 - z} = \dfrac{1}{1 - x - iy} \times \dfrac{(1 - x) + iy}{(1 - x) + iy} = \dfrac{(1 - x) + iy}{(1 - x)^2 + y^2}$ 5 5

$\therefore \operatorname{Re}\dfrac{1}{1 - z} = \dfrac{1 - x}{(1 - x)^2 + y^2} = \dfrac{1 - \operatorname{Re} z}{|1 - z|^2}$ 5 5 $\boxed{20}$

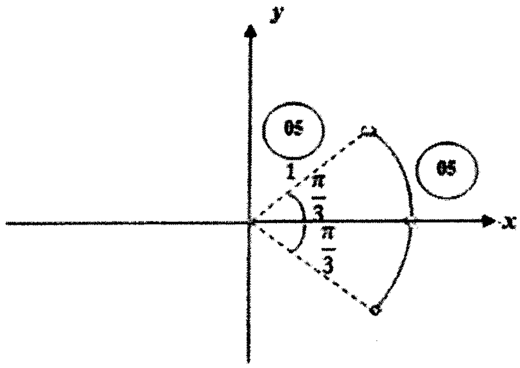
$z \neq 1$ සඳහා, $\operatorname{Re}\dfrac{1}{1-z} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \dfrac{1-\operatorname{Re} z}{|1-z|^2} = \dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2(1-\operatorname{Re} z) = 1 - 2\operatorname{Re} z + |z|^2$ 5

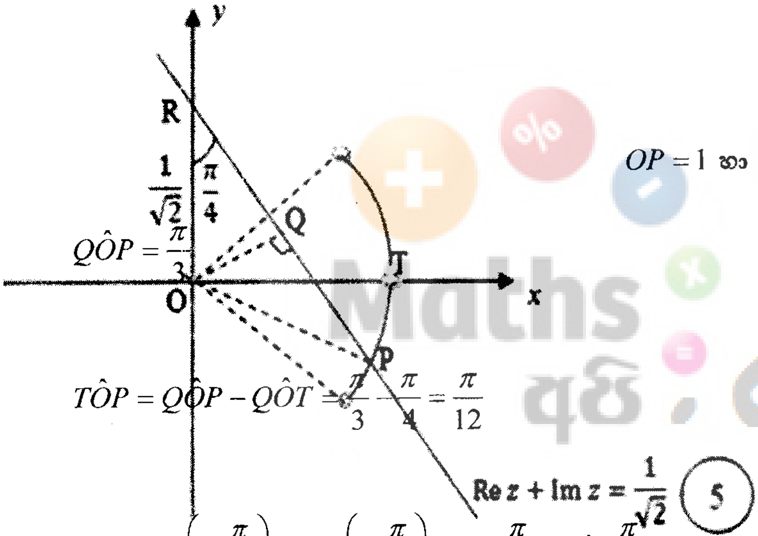
$\Leftrightarrow |z|^2 = 1$

$\Leftrightarrow |z| = 1$ 5

10



10



$Q\hat{O}P = \dfrac{\pi}{3}$

$OP = 1$ හා $OQ = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{2}$, නිසා 5

$T\hat{O}P = Q\hat{O}P - Q\hat{O}T = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\pi}{12}$ 5

5

$\therefore z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$

20

වෙනත් ක්‍රමයක්

$z \in S \Rightarrow z = \cos\theta + i\sin\theta\,;\ -\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ 5

$\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos\theta + \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \sin^2\theta = \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \sin 2\theta = -\dfrac{1}{2}$ 5

$-\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{3}$; බැවින් $\theta = -\dfrac{\pi}{12}$ 5

$\therefore z = \cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right) = \cos\dfrac{\pi}{12} - i\sin\dfrac{\pi}{12}$ 5

20

14 වන ප්‍රශ්නය

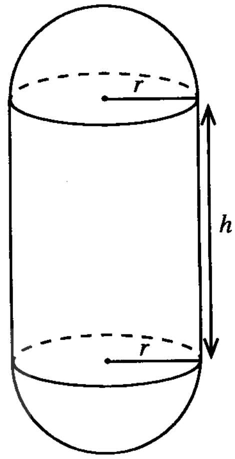
14. (*a*) $x \neq -1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq -1$ සඳහා $f'(x) = \dfrac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$ බව පෙන්වන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍යය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින් $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයේ දළ සටහනක් අඳින්න.

$y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරය භාවිතයෙන් $(x+1)(x^2+3) = 16x$ සමීකරණයේ විසඳුම් **ගණන** සොයන්න.

(*b*) අරය මීටර r වූ කුහර අර්ධ ගෝල දෙකක්, එම අරය ම සහිත උස මීටර h වූ සෘජු වෘත්ත කුහර සිලින්ඩරයකට රූපයේ දැක්වෙන පරිදි දෘඪ ලෙස සම්බන්ධ කිරීමෙන් කුහර සංයුක්ත වස්තුවක් සෑදිය යුතු වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව 36π m^3 වේ. $h = \dfrac{108-4r^3}{3r^2}$ බව පෙන්වන්න.



ද්‍රව්‍ය සඳහා යන වියදම සිලින්ඩරාකාර පෘෂ්ඨය සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 300 ක් ද අර්ධ ගෝලීය පෘෂ්ඨ සඳහා වර්ග මීටරයකට රුපියල් 1000 ක් ද වේ. මෙම සංයුක්ත වස්තුව සෑදීමට අවශ්‍ය ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම රුපියල් C යන්න $0 < r < 3$ සඳහා $C = 800\pi\left(4r^2 + \dfrac{27}{r}\right)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

C අවම වන පරිදි r හි අගය සොයන්න.

(*a*) $f(x) = \dfrac{8x}{(x+1)(x^2+3)}$; $x \neq -1$ **ලෙසගනිමු.**

$x \neq -1$, **සඳහා**

$$f'(x) = \frac{(x+1)(x^2+3).8 - 8x[(x^2+3)+(x+1).2x]}{(x+1)^2(x^2+3)^2} \quad 15$$

$$= \frac{8(x^2+3) - 16x^2(x+1)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{8[3 - x^2 - 2x^3]}{(x+1)^2(x^2+3)^2} \quad 10$$

$$= \frac{8(1-x)(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}$$

25

---

5 5

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය : $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \quad (\because 2x^2+3x+3 \neq 0)$

සියලු x සඳහා $2x^2+3x+3>0$ බැවින් සියලු $x \neq 1$ සඳහා $\dfrac{8(2x^2+3x+3)}{(x+1)^2(x^2+3)^2}>0$ වේ.

එබැවින් $x=\pm 1$ සඳහා $f'(x)$ හි ලකුණ $(1-x)$ හි ලකුණම වේ.

	$x=1$	$x=-1$	
	$-\infty < x < -1$	$-1 < x < 1$	$1 < x < \infty$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(+)$	$(+)$	$(-)$
	$f(x)$ වැඩිවේ.	$f(x)$ වැඩිවේ.	$f(x)$ අඩුවේ.
	5	5	5

$x=1$ හිදී $f'(x)$ අර්ථ නොදැක්වේ. 5

එනයින් $y=f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයට ඇත්තේ එකම හැරුම් ලක්ෂ්‍යයක් පමණි ; එය සාපේක්ෂ උපරිමයක් වන අතර එහි ඛණ්ඩාංක $(1, 1)$ වේ. 5

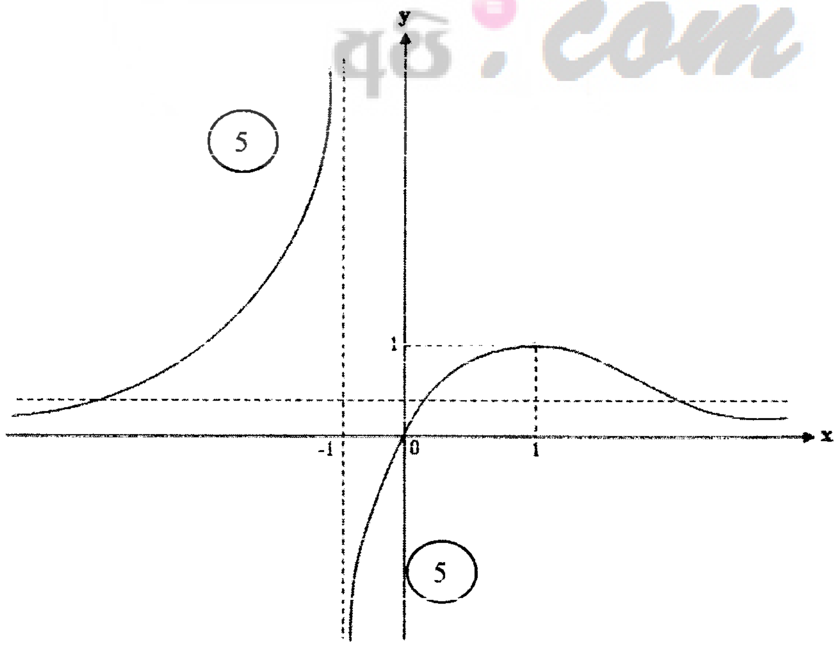
සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය : $f(x)$ අර්ථ නොදක්වෙන්නේ $x=-1$ දී පමණි.

තවද , $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=+\infty$ හා $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=-\infty$ වේ.

එබැවින් $x=-1$. එකම සිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය වේ. 5

තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛ: $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=0$ වේ.

$\therefore y=0$ එකම තිරස් ස්පර්ශෝන්මුඛය වේ. 5



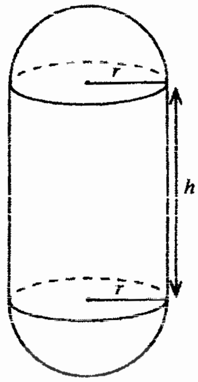
55

$$(x+1)(x^3+3)=16x \Leftrightarrow \frac{1}{2}=\frac{8x}{(x+1)(x^3+3)}$$

$$\Leftrightarrow f(x)=\frac{1}{2} \quad 5$$

අවශ්‍ය විසඳුම් සංඛ්‍යාව $y=f(x)$ හා $y=\frac{1}{2}$ ප්‍රස්තාරවල ඡේදන ලක්ෂ්‍ය ගණන වේ.

ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් මගින් මෙම සංඛ්‍යාව 3 කි. 5 $\boxed{10}$



(b) සංයුක්ත වස්තුවේ මුළු පරිමාව $=\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2 h$ 10

$\frac{4}{3}\pi r^3+\pi r^2 h=36\pi$ බව දී ඇත. 5

$$\Rightarrow 4r^3+3r^2h=108 \quad 5$$

$$\rightarrow h=\frac{108-4r^3}{3r^2}$$

$\boxed{20}$

දැන්, $h>0 \Rightarrow r<3$. එබැවින් $0<r<3$ විය යුතුය. 5

ද්‍රව්‍ය සඳහා යන මුළු වියදම

$$C=300\times 2\pi rh+1000\times 4\pi r^2 \quad 5$$

$$=200\pi\left\{3r\left(\frac{108-4r^3}{3r^2}\right)+20r^2\right\} \quad 5$$

$$=800\pi\left\{4r^2+\frac{27}{r}\right\}\ ;\ 0<r<3.$$

$\boxed{15}$

$$\frac{dC}{dr}=800\pi\left\{8r-\frac{27}{r^2}\right\}. \quad 5$$

$$\therefore \frac{dC}{dr}=0 \Leftrightarrow 8r=\frac{27}{r^2} \Leftrightarrow r=\frac{3}{2} \quad 5 \quad 5$$

$0<r<\frac{3}{2}$ සඳහා $\frac{dC}{dr}<0$ හා

$\frac{3}{2}<r<3$ සඳහා $\frac{dC}{dr}>0$ 5

එනයින් $r=\frac{3}{2}$ වන විට C අවම වේ. 5 $\boxed{25}$

15. (*a*) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}\,\mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) **කොටස් වශයෙන් අනුකලනය** භාවිතයෙන් $\int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}(e^{\pi}+1)$ බව පෙන්වන්න.

(*c*) $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x$ සූත්‍රය පිහිටුවන්න; මෙහි a යනු නියතයකි.

$p(x) = (x-\pi)\,(2x+\pi)$ යැයි ද $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ යැයි ද ගනිමු.

ඉහත ප්‍රතිඵලය භාවිතයෙන් $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2 x}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ බව පෙන්වන්න.

I සඳහා වූ ඉහත අනුකල දෙක භාවිතයෙන් $I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{p(x)}\,\mathrm{d}x$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

ඒ නයින්, $I = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(*a*) $\int \frac{3x+2}{x^2+2x+5}dx$

$= \int \frac{3(x+1)-1}{x^2+2x+5}dx$ 05

$= \frac{3}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}dx - \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx$ 05

$= \frac{3}{2}\ln(x^2+2x+5) - \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right) + C$, මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

05 05 05

[$x^2+2x+5>0$ බව හඳුනා ගන්න.]

$\boxed{25}$

(*b*) $I = \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)dx$

$= \int_1^{e^{\pi}} \cos(\ln x)\frac{dx}{dx}dx$ 05

05 05

$= x\cos(\ln x)\Big|_1^{e^{\pi}} + \int_1^{e^{\pi}} x\sin(\ln x)\frac{1}{x}dx$

05

$= e^{\pi}\cos(\ln e^{\pi}) - \cos(\ln 1) + \int_1^{e^{\pi}} \sin(\ln x)\frac{dx}{dx}dx$ 05

05 05

$= e^{\pi}\cos\pi - \cos 0 - x\sin(\ln x)\Big|_1^{e^{\pi}} - \int_1^{e^{\pi}} x\cos(\ln x)\frac{1}{x}dx$ 05

$= -e^{\pi} - e^{\pi}\sin\pi - \sin(\ln 1) - I$ 05

$2I = -e^{\pi} - 1$

$\therefore I = -\frac{1}{2}\left(e^{\pi}+1\right)$ 05

$\boxed{50}$

(c) $u = a - x$ යැයි ගනිමු. එවිට $x = a - u$ හා $\dfrac{dx}{du} = -1 \Rightarrow dx = -du$ වේ. $x = a$ විට 05

$u = 0$ ද $x = 0$ විට $u = a$ ද වේ.

$$\int_0^a f(x)dx = \int_a^0 f(a-u)(-du) = \int_0^a f(a-u)du = \int_0^a f(a-x)dx$$ 05

05

15

$p(x) = (x-\pi)(2x+\pi)$

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{p\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}dx$$ (ඉහත ප්‍රතිඵලයෙන්)

05

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}dx = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p(x)}dx$$

05

10

$$\because p\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \left(\frac{\pi}{2} - x - \pi\right)\left(2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \pi\right) = -\frac{1}{2}(2x+\pi)2(\pi - x) = (x-\pi)(2x+\pi) = p(x)$$ 20

$$2I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x}{p(x)}dx + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{p(x)}dx$$ 05

$$\therefore I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{p(x)}dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{p(x)}dx$$ 05

10

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(x-\pi)(2x+\pi)}dx$$

05 05 (සටහන: 10 භින්න භාග වෙනුවෙන්)

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left\{\frac{\frac{1}{3\pi}}{(x-\pi)} - \frac{\frac{2}{3\pi}}{(2x+\pi)}\right\}dx = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3\pi}\ln|x-\pi| - \frac{2}{3\pi}\times\frac{1}{2}\ln|2x+\pi|\right\}\Bigg|_0^{\pi/2}$$ 05

$$= \frac{1}{6\pi}\left\{\ln\left|-\frac{\pi}{2}\right| - \ln|-\pi| - \ln|2\pi| + \ln|\pi|\right\}$$ 05

$$I = \frac{1}{6\pi}\left\{\ln\frac{\pi}{2} - \ln 2\pi\right\}$$ 05

$$= \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{\frac{\pi}{2}}{2\pi}\right) = \frac{1}{6\pi}\ln\left(\frac{1}{4}\right)$$ 05

30

16 වන ප්‍රශ්නය

16. l_1 හා l_2 යනු පිළිවෙළින් $2x+y=5$ හා $x+2y=4$ මගින් දෙනු ලබන සරල රේඛා යැයි ගනිමු. l_1 හා l_2 අතර සුළු කෝණය $\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$ බව පෙන්වා, මෙම කෝණයේ සමච්ඡේදකයේ සමීකරණය සොයන්න.

l_1 හා l_2 හි ඡේදන ලක්ෂ්‍යය A යැයි ද $R=\{(x,y): x+2y\le 4$ හා $2x+y\ge 5\}$ යැයි ද ගනිමු. A ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක සොයා, R පෙදෙස xy- තලයෙහි අඳුරු කරන්න.

l_1 හා l_2 රේඛා දෙක ම ස්පර්ශ කරමින් R පෙදෙසෙහි පිහිටන අරය $\sqrt{5}$ ක් වූ S වෘත්තයේ සමීකරණය $x^2+y^2-14x+8y+60=0$ බව පෙන්වන්න.

ස්පර්ශ ජ්‍යාය සඳහා සුපුරුදු සූත්‍රය භාවිතයෙන්, A ලක්ෂ්‍යයේ සිට S වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකවල ස්පර්ශ ජ්‍යායේ සමීකරණය $x-y=10$ බව පෙන්වන්න.

A ලක්ෂ්‍යය ද l_1 හා l_2 සමග S හි ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍ය ද ඔස්සේ යන වෘත්තයේ සමීකරණය සොයන්න.

---

m_1 හා m_2 යනු පිළිවෙළින් l_1 හා l_2 හි **බෑවුම් යැයි ගනිමු. එවිට** $m_1=-2$ **හා** $m_2=-\frac{1}{2}$ **වේ.** 05 05

l_1 **හා** l_2 **අතර කෝණය** θ **යැයි ගනිමු.**

එවිට, $\tan\theta=\left|\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\right|$ 05

05 $=\left|\frac{-2+\frac{1}{2}}{1+(-2)\left(-\frac{1}{2}\right)}\right|=\left|\frac{-\frac{3}{2}}{2}\right|=\frac{3}{4}$

$\therefore \theta=\tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$

$\boxed{20}$

කෝණ සමච්ඡේදක

$$\frac{|2x+y-5|}{\sqrt{5}}=\frac{|x+2y-4|}{\sqrt{5}}$$ 10

i.e. $2x+y-5=\pm(x+2y-4)$ 05

$-x+y+1=0$ or $3x+3y-9=0$

$x-y-1=0$ or $x+y-3=0$

05 05

l_1 **හා** $x-y-1=0$ **අතර සුළු කෝණය** α **යැයි ගනිමු.**

එවිට, $\tan\alpha=\left|\frac{-2-1}{1+(-2)(1)}\right|=3>1$ 05

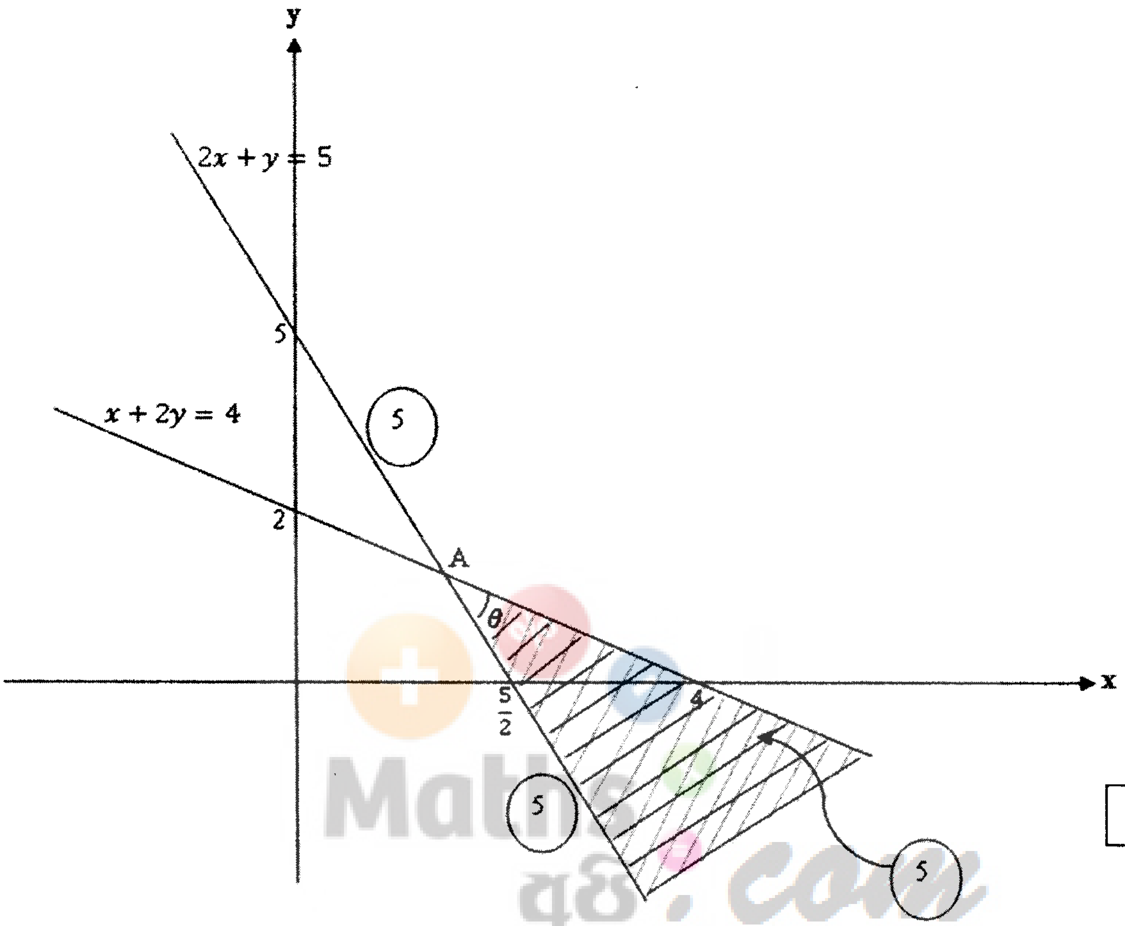
එම නිසා, $x-y-1=0$ **අවශ්‍ය සමච්ඡේදකය නොවේ.**

$\therefore\ x+y-3=0$ **අවශ්‍ය සමච්ඡේදකය වේ.** 05

$\boxed{35}$

$2x + y = 5$ හා $x + 2y = 4$ සමගාමීව විසඳීමෙන්, $x = 2$ හා $y = 1$ ලැබේ.

$\therefore\ A \equiv (2,1).$ 05



20

S හි කේන්ද්‍රය $x + y - 3 = 0$ මත පිහිටිය යුතුය.

එවිට S හි කේන්ද්‍රය $(2+t, 1-t)$ ආකාරයට ලිවිය හැක. 05

S හි අරය $\sqrt{5}$ බැවින්, $\left|\dfrac{2(2+t)+(1-t)-5}{\sqrt{5}}\right| = \sqrt{5}.$ 10

$|t| = 5$

$t = \pm 5$ 05

$C \equiv (7,-4)$ හෝ $(-3,6)$; දෙවැනි ලක්ෂ්‍යය R තුල නොපිහිටයි. 05

05

S හි සමීකරණය

$(x-7)^2 + (y+4)^2 = 5$ 05

$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 = 5$

$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 = 0$ 05

40

<u>**වෙනත් ක්‍රමයක්**</u>

$C \equiv (t', 3 - t')$ 05

S හි අරය $\sqrt{5}$ බැවින්,

$\frac{|2t' + (3 - t' - 5)|}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$ 10

$|t' - 2| = 5$

$t' = 7$ or $t' = -3$ 05

$C \equiv (7, -4)$ හෝ $(-3, 6)$; දෙවැනි ලක්ෂ්‍යය R තුළ නොපිහිටයි. 05

05

S හි සමීකරණය:

$(x - 7)^2 + (y + 4)^2 = 5$ 05

$x^2 - 14x + 49 + y^2 + 8y + 16 = 5$

$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 = 0$ 05

40

05

$x_0 = 2, y_0 = 1, g = -7, f = 4, c = 60$ සමග $x_0 x + y_0 y + g(x + x_0) + f(y + y_0) + c = 0$ මගින් $2x + y - 7(x + 2) + 4(y + 1) + 60 = 0$ ලැබේ.

i.e. $-5x + 5y = -50$

$x - y = 10$ 05

10

අවශ්‍ය වෘත්තයෙහි සමීකරණය,

$x^2 + y^2 - 14x + 8y + 60 + \lambda(x - y - 10) = 0$ 10

ආකාරයට ලිවිය හැක.

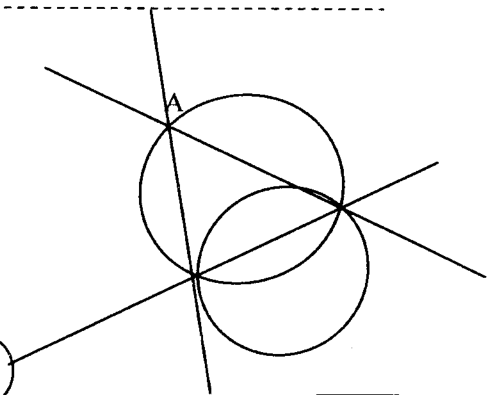
$A \equiv (2, 1)$ මෙම වෘත්තය මත වේ.

$\therefore 4 + 1 - 28 + 8 + 60 + \lambda(x - y - 10) = 0$ 05

$45 - 9\lambda = 0$

$\lambda = 5$ 05

එම නිසා අවශ්‍ය වෘත්තය: $x^2 + y^2 - 9x + 3y + 10 = 0$ 05



25

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $f(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $A\cos(2x+\alpha)+B$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $A\,(>0)$, B හා α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

ඒ නයින්, $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන සමීකරණය විසඳන්න.

$f(x)$ සඳහා දෙන ලද මුල් ප්‍රකාශනය යොදා ගනිමින් $f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$ යන්න $2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න; මෙහි $k = 2-\sqrt{2}$ වේ.

$\tan\frac{\pi}{24} = \sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

තව ද $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ සඳහා $y = 2f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) සුපුරුදු අංකනයෙන්, ත්‍රිකෝණයක් සඳහා **සයින් නීතිය** ප්‍රකාශ කරන්න.

ABC යනු ත්‍රිකෝණයක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $a:b:c = 1:\lambda:\mu$ බව දී ඇත; මෙහි λ හා μ යනු නියත වේ. $\mu^2(\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C) = 4\lambda\sin^3 C$ බව පෙන්වන්න.

(a) $f(x) = \frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x}$; $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$= \cos^2 x\left(1-\frac{\sin x}{\cos x}\right) = \quad = \cos^2 x - \sin x\cos x \quad 5$$

$$05 \quad = \frac{1+\cos 2x}{2} - \frac{\sin 2x}{2} \quad 05$$

$$= \frac{1}{2}\{\cos 2x - \sin 2x\} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2x - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2x\right\} + \frac{1}{2} \quad 05$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin\frac{\pi}{4}\sin 2x\right\} + \frac{1}{2} \quad 05$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} \quad 05$$

$A = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $B = \frac{1}{2}$, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ 05

35

$f(x) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

05

$$\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3}$$

$$2x + \frac{\pi}{4} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}; n \in \mathbb{Z} \quad 05$$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$$

$$2x = 2n\pi + \frac{\pi}{12} \text{ හෝ } 2x = 2n\pi - \frac{7\pi}{12}$$

$$x = n\pi + \frac{\pi}{24} \text{ හෝ } x = n\pi - \frac{7\pi}{24} \quad 05$$

$$x = \frac{\pi}{24}, -\frac{7\pi}{24} \left(\because -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \right)$$

05

$\boxed{20}$

$$\frac{1-\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$$

$$4 - 4\tan x = 2 + \sqrt{2} + (2+\sqrt{2})\tan^2 x$$

$$4 - (2+\sqrt{2}) - 4\tan x = (2+\sqrt{2})\tan^2 x \text{ ....(i)} \quad 05$$

$$\text{(i)} \times (2-\sqrt{2}) \Rightarrow$$

$$(2-\sqrt{2})^2 - 4(2-\sqrt{2})\tan x = (2^2 - (\sqrt{2})^2)\tan^2 x$$

$$2\tan^2 x + 4(2-\sqrt{2})\tan x - (2-(\sqrt{2}))^2 = 0 \quad 05$$

$$2\tan^2 x + 4k\tan x - k^2 = 0, \text{ මෙහි, } k = (2-\sqrt{2}). \quad 05$$

$\boxed{15}$

05

$$\tan x = \frac{-4k \pm \sqrt{16k^2 + 8k^2}}{4} \quad = \frac{-2k \pm \sqrt{6}k}{2}$$

05

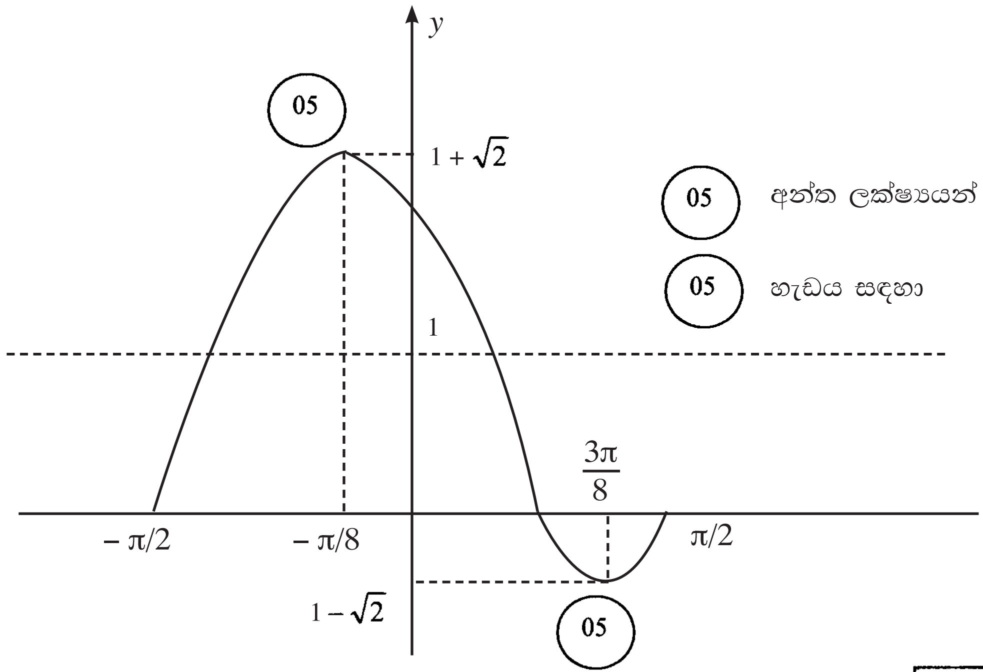
$$\tan\frac{\pi}{24} = -(2-\sqrt{2}) + \frac{\sqrt{6}}{2}(2-\sqrt{2}); \left(\because \tan\frac{\pi}{24} > 0 \right) \quad 05$$

$$= \sqrt{6} - \sqrt{3} + \sqrt{2} - 2 \quad 05$$

$\boxed{20}$

$$y = 2f(x)$$

$$= \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) + 1; -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$



05 අන්ත ලක්ෂ්‍යයන්

05 හැඩය සඳහා

20

(b) **සයින් සූත්‍රයෙන්:** $\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}=\frac{\sin C}{c}$ 05 **05**

$$\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C = 2\sin(A+B)\cos(A-B)+2\sin C\cos C \quad 05 \quad 05$$

$$= 2\sin C\cos(A-B)-2\sin C\cos(A+B) \quad 05$$

$$= 2\sin C\left[\cos(A-B)-\cos(A+B)\right]$$

$$= 4\sin C\sin A\sin B \quad 05$$

$$= 4\sin C\frac{\sin A}{a}.\frac{\sin B}{b}.ab \quad 05$$

$$= 4\sin C\frac{\sin C}{c}.\frac{\sin C}{c}.ab$$

$$\Rightarrow c^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4ab\sin^3 C \quad 05$$

$$\mu^2a^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4a\lambda a\sin^3 C \quad (\because a:b:c=1:\lambda:\mu) \quad 05$$

$$\mu^2(\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C)=4\lambda\sin^3 C$$

35

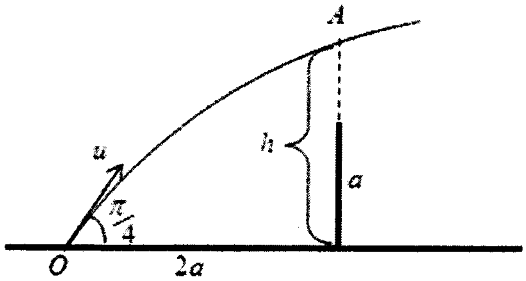
2.2.3. II ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. තිරස් බිමක් මත වූ O ලක්ෂ්‍යයක සිට u වේගයෙන් තිරස සමග $\frac{\pi}{4}$ කෝණයක් සාදන දිශාවකින්, උස a වූ ද O සිට $2a$ තිරස් දුරකින් වූ ද සිරස් තාප්පයක් දෙසට අංශුවක් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. $u > 2\sqrt{ga}$ නම්, අංශුව තාප්පයට ඉහළින් යන බව පෙන්වන්න.

$u > 2\sqrt{ga}$ යැයි ගනිමු.



O සිට A දක්වා චලිතය සඳහා : $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්

$$\rightarrow \quad 2a = u\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)t \qquad 5$$

$$t = \frac{2\sqrt{2}a}{u}$$

$$\uparrow \quad h = u\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)t - \frac{1}{2}gt^2 \qquad 10$$

$$= 2a - \frac{1}{2}g.\frac{8a^2}{u^2} = 2a - \frac{4ga^2}{u^2} \qquad 5$$

$$> 2a - \frac{4ga^2}{4ga} \; (\because u^2 > 4ga)$$

$$= a$$

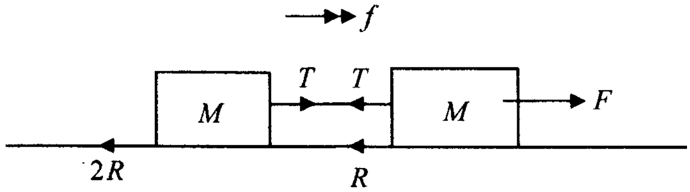
$\Rightarrow h > a$ වන අතර එමනිසා අංශුව බිත්තියට ඉහළින් යයි. 5

$\boxed{25}$

2 වන ප්‍රශ්නය

2. **ස්කන්ධය M kg වූ වාහනයක්, සැහැල්ලු අවිතන්‍ය කේබලයක් මගින් එම ස්කන්ධය ම සහිත ට්‍රේලරයක් සෘජු තිරස් පාරක් දිගේ ඇදගෙන යයි. වාහනයේ චලිතයට හා ට්‍රේලරයේ චලිතයට ප්‍රතිරෝධ පිළිවෙළින් නිව්ටන R හා $2R$ වේ. වාහනයේ එන්ජිම P kW ජවයකින් ක්‍රියා කරමින් වාහනය V m s^{-1} වේගයෙන් චලනය වෙමින් තිබෙන මොහොතේ දී කේබලයේ ආතතිය නිව්ටන $\frac{1}{2}\left(R+\frac{1000P}{V}\right)$ බව පෙන්වන්න.**

ප්‍රකර්ෂණ බලය $F = \frac{1000P}{V} N$. 5



$\underline{F} = m\underline{a}$ ⟶ පද්ධතිය සඳහා: $F - 3R = 2Mf$ ----- (i) 10

⟶ ට්‍රේලරය සඳහා: $T - 2R = Mf$ ------ (ii) 5

(i) සහ (ii) න්,

$$2(T - 2R) = F - 3R$$

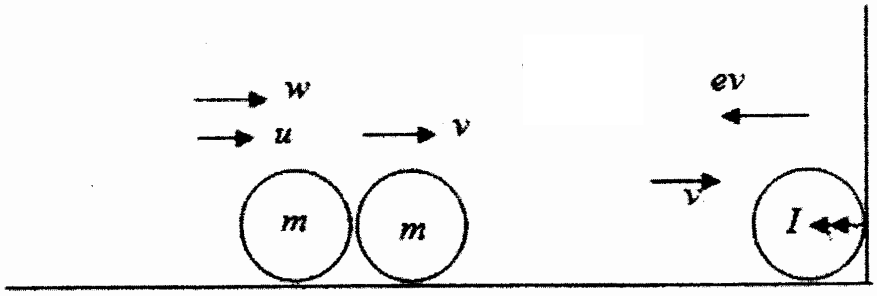
$$T = \frac{1}{2}(R + F) \quad 5$$

$$= \frac{1}{2}\left(R + \frac{1000P}{V}\right) N.$$

$\boxed{25}$

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් සුමට තිරස් ගෙබීමක් මත, u වේගයෙන් සිරස් බිත්තියක් දෙසට, බිත්තියට ලම්බ සරල රේඛාවක චලනය වේ. බිත්තිය සමග ගැටීමට පෙර P අංශුව, එහි පෙතෙහි නිශ්චලව ඇති එම ස්කන්ධය ම සහිත තවත් Q අංශුවක් සමග සරල ලෙස ගැටෙන අතර, Q අංශුව ඉන්පසුව බිත්තියේ ගැටී පොලා පනී. ගැටුම් දෙක ම සඳහා ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e $(0 < e < 1)$ වේ. Q අංශුව මත බිත්තියෙන් ඇති කරන ආවේගය $\frac{1}{2}(1+e)^2 mu$ බව පෙන්වන්න.



පළමු ගැටුම සඳහා

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$ පද්ධතියට $\longrightarrow$ $mv + mw - mu = 0$ 5

$v + w = u$

නිවුටන් ප්‍රත්‍යාගති නියමය: $v - w = eu$ 10

$v = \frac{1}{2}(1+e)\,u$

දෙවැනි ගැටුම සඳහා,

$\underline{I} = \Delta(m\underline{v})$; Q සඳහා, $\longleftarrow$ $I = mev - (-mv)$ 5

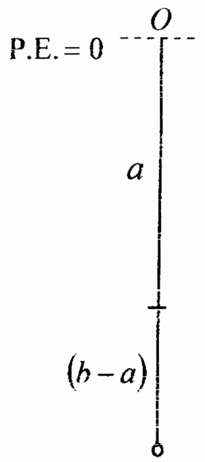
$= (1+e)\,mv$

එම නිසා Q මත ආවේගය $= \frac{1}{2}(1+e)^2\ mu$ 5

25

4 වන ප්‍රශ්නය

4. ස්වාභාවික දිග a හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $4mg$ වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක කෙළවරක් අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ගැට ගසා ඇති අතර අනෙක් කෙළවර ස්කන්ධය m වූ අංශුවකට සම්බන්ධ කර ඇත. O හි නිශ්චලතාවයේ සිට අංශුව ගුරුත්වය යටතේ මුදා හරිනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන්, පසුව සිදු වන චලිතයේ දී තන්තුවේ උපරිම දිග සොයන්න.



O සහ පහත්ම ලක්ෂ්‍යය යන දෙකේදීම චාලක ශක්තිය ශූන්‍ය වන බැවින්,

ශක්ති සංස්ථිති සමීකරණයෙන්:

$$0+\frac{1}{2}\frac{4mg}{a}(b-a)^2-mgb=0 \qquad 15$$

වා. ශ 5

වි.ශ. 5

සමීකරණය 5

$$2(b-a)^2=ab$$

$$2b^2+2a^2-5ab=0 \qquad 5$$

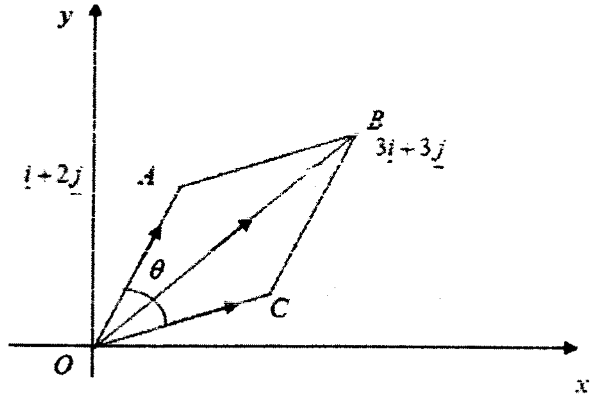
$$(b-2a)(2b-a)=0 \quad \Rightarrow b=2a \quad (\because b>a) \qquad 5$$

$$\boxed{25}$$

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, $\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ හා $3\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ යනු O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් පිළිවෙළින් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික යැයි ගනිමු. C යනු $OABC$ සමාන්තරාස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{OC} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න.

$A\hat{O}C = \theta$ යැයි ගනිමු. $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$ සැලකීමෙන් $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ බව පෙන්වන්න.



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$
$$= -(\underline{i} + 2\underline{j}) + (3\underline{i} + 3\underline{j})$$
$$= 2\underline{i} + \underline{j} \quad 5$$

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$ නිසා $\overrightarrow{OC} = 2\underline{i} + \underline{j}$ වේ. 5

අදිශ ගුණිතය $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = (\underline{i} + 2\underline{j}) \cdot (2\underline{i} + \underline{j}) = 4$ 5

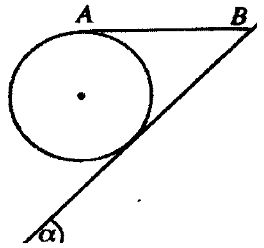
5 $\therefore \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = |\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}| \cos\theta = 4$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{4}{\sqrt{5}\sqrt{5}} = \dfrac{4}{5}.$ 5

25

6 වන ප්‍රශ්නය

6. බර W වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ රළු තලයක් මත නිශ්චලව ඇත්තේ, ගෝලයේ උච්චතම ලක්ෂ්‍යය වූ A ට හා ආනත තලයේ B ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කරනු ලැබූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. AB තන්තුව තිරස් ව පවතින විට ගෝලය සීමාකාරී සමතුලිතතාවේ තිබේ. ඝර්ෂණ කෝණය $\dfrac{\alpha}{2}$ බව පෙන්වා, තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.



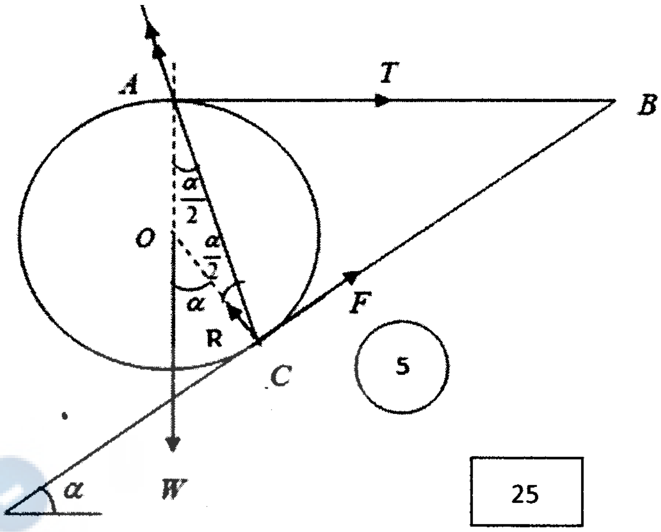
ඝර්ෂණ කෝණය $= O\hat{C}A$, 5

හා $O\hat{C}A = \dfrac{\alpha}{2}$ 5

A හි ඒක ලක්ෂ්‍යය බල සඳහා ලාමී ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්.

$$\frac{T}{\sin\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{W}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)}$$ 5

$$T = W\tan\frac{\alpha}{2}$$ 5



5

25

වෙනත් ක්‍රමයක්

$C \curvearrowleft \quad W a\sin\alpha = T(a + a\cos\alpha)$ 5

$$T = \frac{W\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = W\tan\frac{\alpha}{2}$$

5

10

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. සුපුරුදු අංකනයෙන් $P((A\cup B)\cap(A'\cup B')) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$ බව පෙන්වන්න.

$$P((A\cup B)\cap(A'\cup B')) = P\left((A\cup B)\cap(A\cap B)'\right) = P(A\cup B) - P((A\cup B)\cap(A\cap B)) \quad 10$$

5

$$[\because P(X\cap Y') = P(X) - P(X\cap Y)]$$

$$5 \quad = P(A\cup B) - P(A\cap B) = P(A)+P(B)-P(A\cap B)-P(A\cap B)$$

$$= P(A)+P(B)-2P(A\cap B) \quad 5$$

$\boxed{25}$

වෙනත් ක්‍රමයක් $P((A\cup B)\cap(A'\cup B'))$

$$5 \quad = P(A\cap B') + P(B\cap A') \quad \because [(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B'] = [A\cap B']\cup[B\cap A'] \quad 10$$

$$= P(A) - P(A\cap B) + P(B) - P(A\cap B) = P(A)+P(B)-2P(A\cap B) \quad 5$$

5

$\boxed{25}$

8 වන ප්‍රශ්නය

8. **මල්ලක, ප්‍රමාණයෙන් සමාන වූ රතු බෝල 6 ක් ද සුදු බෝල 4 ක් ද අඩංගු වේ. බෝල තුනක්, වරකට එක බැගින්, ප්‍රතිස්ථාපනයකින් තොරව, සසම්භාවී ලෙස මල්ලෙන් ඉවතට ගනු ලැබේ. දෙවැනි බෝලය සුදු එකක් බව දී ඇති විට, තුන්වැනි බෝලය රතු එකක් වීමේ සම්භාවිතාව සොයන්න.**

R: රතු., W: සුදු

$$P(3\text{ වෙනි } R \mid 2\text{ වෙනි } W) = \frac{P(RWR) + P(WWR)}{P(2\text{ වෙනි } W)} \quad 5 \quad 5$$

5

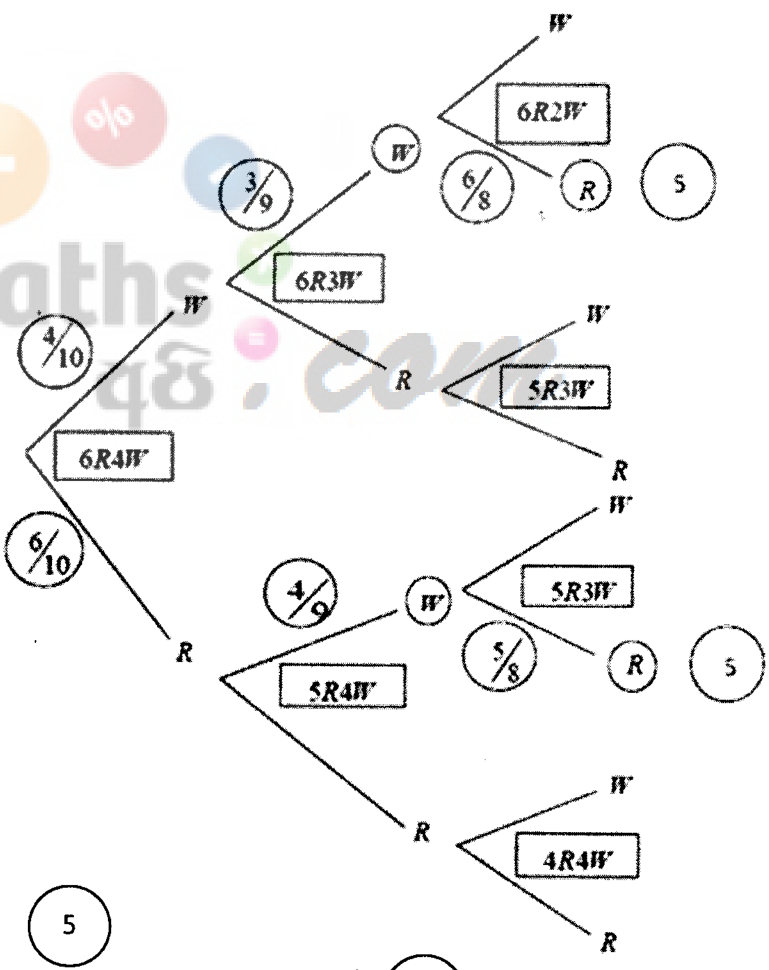
$$= \left(\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8}\right) \Big/ \left(\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\right) \quad 5$$

$$= \frac{2}{3} \quad 5$$

25

<u>වෙනත් ක්‍රමයක්</u>

R: රතු, W: සුදු



5

$$P(3\text{ වෙනි } R \mid 2\text{ වෙනි } W) = \left(\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\times\frac{6}{8} + \frac{6}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{5}{8}\right) \Big/ \left(\frac{6}{10}\times\frac{4}{9}+\frac{4}{10}\times\frac{3}{9}\right) \quad 5$$

$$= \frac{2}{3} \quad 5$$

25

9 වන ප්‍රශ්නය

9. **නිරීක්ෂණ පහක මධ්‍යන්‍යය හා මධ්‍යස්ථය පිළිවෙළින් 7 හා 9 වේ. නිරීක්ෂණවල එක ම මාතය 11 වේ. නිරීක්ෂණ සියල්ල ධන නිඛිල වේ යැයි උපකල්පනය කරමින්, වැඩිතම නිරීක්ෂණය හා අඩුතම නිරීක්ෂණය සොයන්න.**

නිරීක්ෂණ: $x,\ y,\ 9,\ 11,\ 11$ 10

$$\frac{x+y+31}{5} = 7 \quad 5$$

$$\Rightarrow x+y=4$$

x හා y ධන නිඛිල නිසා, $(x=1,\ y=3)$, $(x=2,\ y=2)$ හෝ $(x=3,\ y=1)$.

දැන්, එකම මාතය 11 වන බැවින් නිරීක්ෂණ වන්නේ 1, 3, 9, 11, 11. 5

විශාලතම නිරීක්ෂණය $=11$ 5

අඩුතම නිරීක්ෂණය $=1$

25

10 වන ප්‍රශ්නය

10. පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ 100 ක සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යන්‍යය 31.8 වේ.

5 - 15	15 - 25	25 - 35	35 - 45	45 - 55
16	x	30	y	20

x හා y හි අගයන් සොයා, ව්‍යාප්තියේ මධ්‍යස්ථය නිමානය කරන්න.

නිරීක්ෂණ 100 හි මුළු අගය $= 10\times16+20x+30\times30+40y+50\times20=31.8\times100$ 5

$$2x+4y=318-206=112$$

$$x+2y=56 \text{ ....(i)}$$

$$66+x+y=100$$ 5

$$x+y=34 \text{ ....(ii)}$$

$\therefore\ x=12$ සහ $y=22$ 5

මධ්‍යස්ථය $= 25+\dfrac{50-28}{30}\times10$ 5

$$=25+\frac{22}{3}$$

$$=\frac{97}{3}$$

$$\approx 32.33$$ 5

$\boxed{25}$

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11. (*a*) තිරසට $\alpha\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් ආනත අචල සුමට තලයක වූ O ලක්ෂ්‍යයක P හා Q අංශු දෙකක් තබා ඇත. O හරහා වූ උපරිම බෑවුම් රේඛාව දිගේ උඩු අතට P අංශුවට u ප්‍රවේගයක් දෙනු ලබන අතර, එම මොහොතේ ම, Q අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. අංශු දෙක ආනත තලය හැර නොයන බව උපකල්පනය කරමින්, P හා Q හි චලිත සඳහා ප්‍රවේග-කාල ප්‍රස්තාරවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

මෙම ප්‍රස්තාර භාවිතයෙන්, P අංශුව O ලක්ෂ්‍යයට නැවත පැමිණෙන මොහොතේ දී Q අංශුව O සිට $\dfrac{2u^2}{g\sin\alpha}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

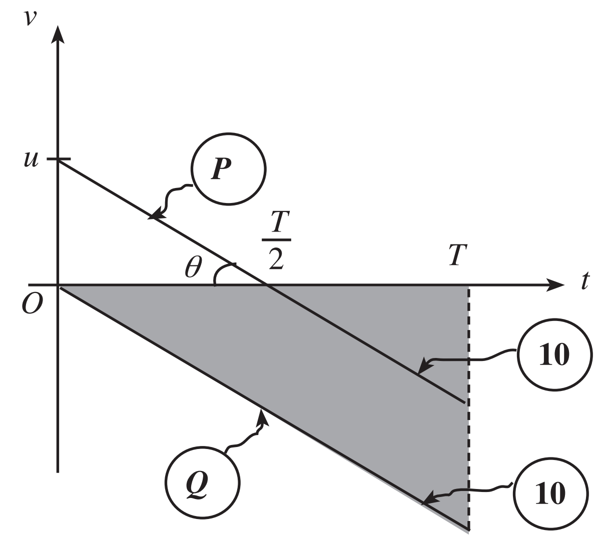
(*b*) ඍජු සමාන්තර ඉවුරු සහිත ගඟක් $\mathbf{u}$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයකින් ගලා බසී. A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙක එකක් එක් ඉවුරක ද අනෙක අනෙක් ඉවුරේ ද පිහිටා ඇත්තේ $\overrightarrow{AB}$ යන්න $\mathbf{u}$ සමග α සුළු කෝණයක් සාදන පරිදි ය. පිරිමි ළමයෙක් A වලින් ආරම්භ කර, ජලයට සාපේක්ෂ ව අචල දිශාවකට විශාලත්වය $2u$ වූ නියත ප්‍රවේගයකින් පිහිනමින්, B වෙත ළඟා වෙයි; මෙහි $u=|\mathbf{u}|$ වේ. ඔහු ඉන්පසු, B වලින් ආරම්භ කර A වෙත ආපසු පැමිණෙන පරිදි ජලයට සාපේක්ෂ ව අචල දිශාවකට එම $2u$ විශාලත්වය ම සහිත ප්‍රවේගයකින් පිහිනයි. A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා ද B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා ද ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණවල දළ සටහන් එක ම රූපයක අඳින්න.

ඒ නයින්, A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා ද B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා ද ජලයට සාපේක්ෂ ව ඔහුගේ ප්‍රවේගය පිළිවෙළින් $\overrightarrow{AB}$ හා $\overrightarrow{BA}$ සමග එක ම θ කෝණයක් සෑදිය යුතු බව පෙන්වන්න; මෙහි $\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sin\alpha$ වේ.

B සිට A දක්වා පිහිනීමට ගත් කාලය, A සිට B දක්වා පිහිනීමට ගත් කාලය මෙන් $k\,(1<k<3)$ ගුණයක් නම්, $\cos\theta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{k+1}{k-1}\right)\cos\alpha$ බව පෙන්වන්න.

$\sin\theta$ හා $\cos\theta$ සඳහා වූ ඉහත ප්‍රකාශන භාවිතයෙන් $\cos\alpha=\dfrac{(k-1)}{2}\sqrt{\dfrac{3}{k}}$ බව ද පෙන්වන්න.

(*a*)



20

$$\tan\theta = g\sin\alpha = \frac{u}{T/2} \quad 5 \quad 5$$

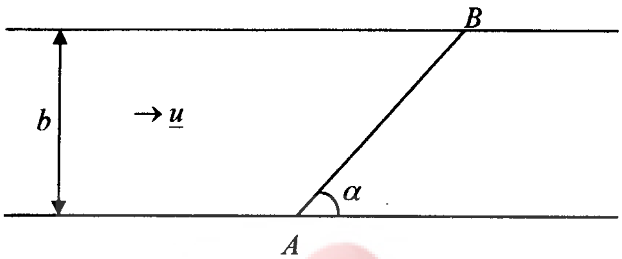
$$\therefore T = \frac{2u}{g\sin\alpha} \quad 5$$

P අංශුව ආපසු O වෙත පැමිණෙන විට Q හි O සිට දුර = අඳුරු කල ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය

$$= \frac{1}{2}\times T\times 2u = \frac{2u^2}{g\sin\alpha} \quad 10 \quad 5$$

$\boxed{30}$

(b)



$\underline{V}(Boy, E) = \underline{V}(Boy, W) + \underline{V}(W, E)$ 5

$= \underline{V}(W, E) + \underline{V}(Boy, W)$

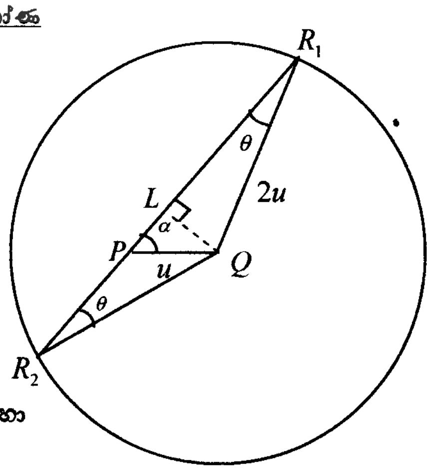
$= \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR_i}$ 5

$= \overrightarrow{PR_i}$ $\quad i=1 \nearrow$ (A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා)

5 $\quad i=2 \swarrow$ (B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා)

<u>ප්‍රවේග ත්‍රිකෝණ</u>

$R_2R_1 \,//\, AB$



15

A සිට B දක්වා චලිතය සඳහා

15

B සිට A දක්වා චලිතය සඳහා

$\boxed{45}$

$QL = 2u\sin\theta \;\; = u\sin\alpha$ 5 5

$\Rightarrow \sin\theta = \frac{1}{2}\sin\alpha$

$\boxed{10}$

$PR_1 = 2u\cos\theta + u\cos\alpha$ 5 $\qquad PR_2 = 2u\cos\theta - u\cos\alpha$ 5

$T_1 = \dfrac{AB}{2u\cos\theta + u\cos\alpha}$ 5 $\qquad T_2 = \dfrac{AB}{2u\cos\theta - u\cos\alpha}$ 5

$T_2 = kT_1 \;\; \Rightarrow 2u\cos\theta + u\cos\alpha = k(2u\cos\theta - u\cos\alpha)$ 5

$$2(k-1)\cos\theta = (k+1)\cos\alpha$$ 5

$$\therefore \cos\theta = \frac{1}{2}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)\cos\alpha$$

$\boxed{30}$

$\frac{1}{4}\sin^2\alpha + \frac{1}{4}\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2\cos^2\alpha = 1 \quad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$ 5

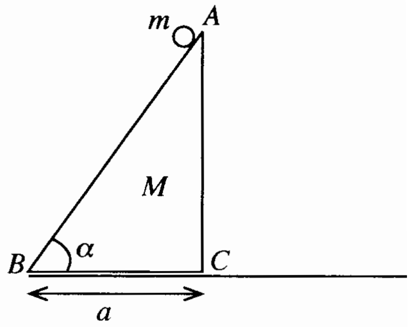
$\left[\left(\frac{k+1}{k-1}\right)^2 - 1\right]\cos^2\alpha = 3$ 5

$\Rightarrow \cos^2\alpha = \dfrac{3(k-1)^2}{4k} \qquad \therefore \cos\alpha = \dfrac{k-1}{2}\sqrt{\dfrac{3}{k}}$ 5

$\boxed{15}$

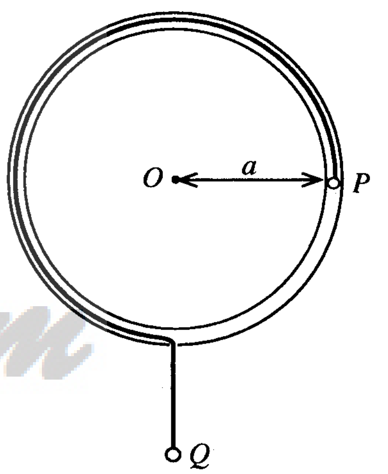
12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) දී ඇති රූප සටහනෙහි ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය M වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් හරස්කඩක් නිරූපණය කරයි. AB රේඛාව එය අයත් මුහුණතෙහි උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් වන අතර $A\hat{B}C = \alpha$, $A\hat{C}B = \frac{\pi}{2}$ හා $BC = a$ වේ. සුමට තිරස් ගෙබිමක් මත BC අයත් මුහුණත ඇතිව කුඤ්ඤය තබා ඇත. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් AB රේඛාව මත A ලක්ෂ්‍යයෙහි සීරුවෙන් තබා නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. අංශුව කුඤ්ඤය හැර යන තෙක්, කුඤ්ඤයේ ත්වරණය $\dfrac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$ බව පෙන්වා, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂ ව අංශුවේ ත්වරණය සොයන්න.

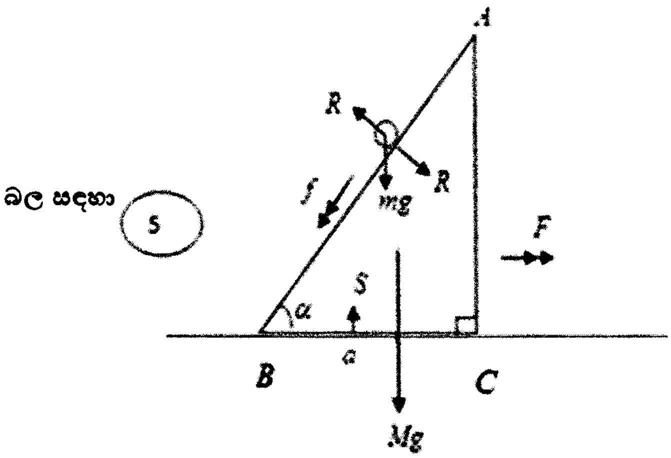


දැන්, $\alpha = \frac{\pi}{4}$ හා $M = \frac{5m}{2}$ යැයි සිතමු. අංශුව කුඤ්ඤය හැර යන මොහොතේ දී කුඤ්ඤයේ වේගය $\sqrt{\frac{2ag}{21}}$ බව පෙන්වන්න.

(*b*) අරය a සහ කේන්ද්‍රය O වූ සිහින් සුමට වෘත්තාකාර නළයක් සිරස් තලයක සවිකර ඇත. දිග $\frac{3\pi a}{2}$ ට වඩා වැඩි සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක එක් කෙළවරක්, OP තිරස් ව ඇතිව නළය තුළ අල්වා තැබූ, ස්කන්ධය m වන P අංශුවකට ඈඳා ඇත. රූපයේ පෙන්වා ඇති පරිදි තන්තුව නළය තුළින් ද නළයේ පහළ ම ලක්ෂ්‍යයේ ඇති කුඩා සුමට සිදුරක් තුළින් ද යමින් අනෙක් කෙළවරෙහි ස්කන්ධය $2m$ වූ Q අංශුවක් දරා සිටියි. තන්තුව තදව ඇතිව ඉහත පිහිටීමෙන් P අංශුව නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය යෙදීමෙන් $\theta\left(0 < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ කෝණයකින් OP හැරී ඇති විට P අංශුවේ වේගය v යන්න $v^2 = \frac{2ga}{3}(2\theta - \sin\theta)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වා, P අංශුව මත නළයෙන් ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.



(*a*)



$\underset{\sim}{a}(M,E) = \rightarrow F$ and $\underset{\sim}{a}(m,M) = f \; \swarrow \alpha$ යයි ගනිමු. 5

එවිට $\underset{\sim}{a}(m,E) = \alpha \; \swarrow f \;\; \rightarrow F$ 10

$\underset{\sim}{F} = m\underset{\sim}{a}$: යොදමු.

පද්ධතිය සඳහා $\longrightarrow$ $0 = MF + m(F - f\cos\alpha)$ ---------- (i) 15

m සඳහා $\swarrow$ $mg\sin\alpha = m(f - F\cos\alpha)$ ---------- (ii) 15

$$(\text{i}) \Rightarrow f = \frac{(m+M)F}{m\cos\alpha}$$

$$(\text{ii}) \Rightarrow g\sin\alpha = \frac{(m+M)F}{m\cos\alpha} - F\cos\alpha$$

$$mg\sin\alpha\cos\alpha = (M + m - m\cos^2\alpha)F$$

$$\therefore F = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$ 10

$$f = \frac{(M+m)}{m\cos\alpha}\,\frac{mg\cos\alpha\sin\alpha}{(M + m\sin^2\alpha)}$$

$$= \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M + m\sin^2\alpha}$$ 10

70

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ හා $M = \frac{5m}{2}$ යෙදූ විට $F = \frac{g}{6}$ හා $f = \frac{7g}{6\sqrt{2}}$. 5

M සාපේක්ෂව m හි චලිතය සඳහා $\swarrow$ $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යොදමු.

$$\sqrt{2}a = \frac{1}{2}\cdot\frac{7g}{6\sqrt{2}} \times T^2$$ 5

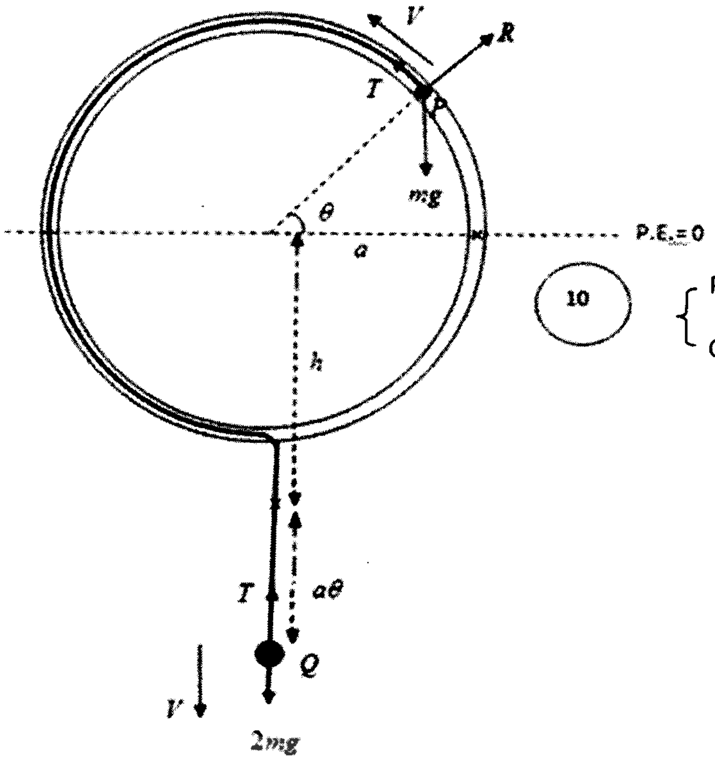
$$T = \sqrt{\frac{24a}{7g}}$$ 5

E සාපේක්ෂව M හි චලිතය සඳහා $\rightarrow$ $v = u + at$ යොදමු.

$$v = \frac{g}{6}\sqrt{\frac{24a}{7g}} = \sqrt{\frac{2ga}{21}}$$ 5

20

12.(b)



10 { Pහි බල 5
Qහි බල 5 }

ශක්ති සංස්ථිති මූලධර්මය මගින්,

$$\frac{1}{2}mV^2 + \frac{1}{2}(2m)V^2 + mga\sin\theta - 2mg(a\theta + h) = -2mgh$$ 25

වා.ශ.- 10 වි.ශ.- 10
සමීකරණ 5

$$\frac{3}{2}V^2 = 2ag\theta - ga\sin\theta$$

$$V^2 = \frac{2}{3}ga(2\theta - \sin\theta)$$ 5

$\boxed{40}$

P, අංශුව සඳහා $\underline{F} = m\underline{a} \Rightarrow$

$$mg\sin\theta - R = \frac{mV^2}{a}$$ 10

$$R = mg\sin\theta - \frac{2mg}{3}(2\theta - \sin\theta)$$

$$= \frac{mg}{3}[3\sin\theta - 4\theta + 2\sin\theta]$$ 5

$$= \frac{mg}{3}[5\sin\theta - 4\theta]$$ 5

$\boxed{20}$

13 වන ප්‍රශ්නය

13. ස්වාභාවික දිග $4a$ හා ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය $8mg$ වූ සිහින් සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ දුන්නක්, එහි පහළ කෙළවර O අචල වන සේ සිරස් ව සිටුවා ඇත. ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක් එහි ඉහළ කෙළවරට ඈඳා තිබේ. P අංශුව O ට සිරස් ව ඉහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යයක සමතුලිත ව ඇත. $OA = \dfrac{7a}{2}$ බව පෙන්වන්න.

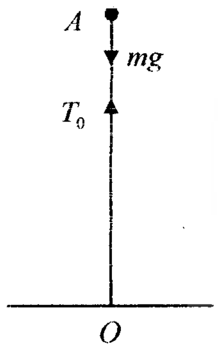
දැන්, එම m ස්කන්ධය ම සහිත තවත් Q අංශුවක් P ට සීරුවෙන් ඈඳනු ලබන අතර සංයුක්ත අංශුව A හි නිශ්චලතාවයේ සිට චලිතය ආරම්භ කරයි. සංයුක්ත අංශුවේ චලිත සමීකරණය $\ddot{x} = -\dfrac{g}{a}x$ බව පෙන්වන්න; මෙහි x යනු $OB = 3a$ වන පරිදි O ට සිරස් ව ඉහළින් පිහිටි B ලක්ෂ්‍යයේ සිට සංයුක්ත අංශුවේ විස්ථාපනය වේ.

සංයුක්ත අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය C යැයි ගනිමු. OC දිග ද A සිට C දක්වා චලනය වීමට සංයුක්ත අංශුව ගන්නා කාලය ද සොයන්න.

සංයුක්ත අංශුව C හි ඇති මොහොතේ දී Q අංශුව සීරුවෙන් ඉවත් කරනු ලැබේ. පසුව සිදුවන P අංශුවේ චලිතය සඳහා චලිත සමීකරණය $\ddot{y} = -\dfrac{2g}{a}y$ බව පෙන්වන්න; මෙහි y යනු A ලක්ෂ්‍යයේ සිට P අංශුවේ විස්ථාපනය වේ.

මෙම සමීකරණයට $y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ විසඳුමක් උපකල්පනය කරමින් α, β හා ω නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, C සිට D දක්වා චලනය වීමට P අංශුව ගන්නා කාලය $\dfrac{\pi}{3}\sqrt{\dfrac{2a}{g}}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි D යනු $OD = 4a$ වන පරිදි O ට සිරස් ව ඉහළින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය වේ. D වෙත ළඟා වන විට P අංශුවේ වේගය ද සොයන්න.



සමතුලිතතාව සඳහා $\uparrow$ $T_0 = mg$ 5

තවද, $T_0 = \dfrac{8mg}{4a}(4a - OA)$ 5

$\therefore \dfrac{8mg}{4a}(4a - OA) = mg$

5 $8a - 2(OA) = a \Rightarrow OA = \dfrac{7a}{2}$

15

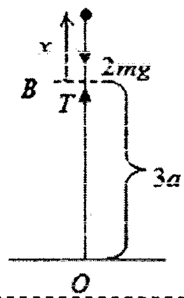
සංයුක්ත අංශුවේ චලිතය සඳහා

$\uparrow$ $F = ma$

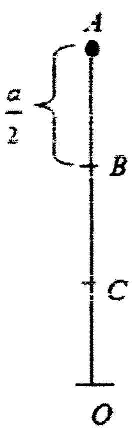
$T - 2mg = 2m\ddot{x}$ 10

5 $\dfrac{8mg}{4a}(a - x) - 2mg = 2m\ddot{x}$

$\Rightarrow \ddot{x} = -\dfrac{g}{a}x$ 5



20



මෙම සරල අනුවර්තීය චලිතයේ කේන්ද්‍රය B වේ. මෙහි $OB = 3a$. 5

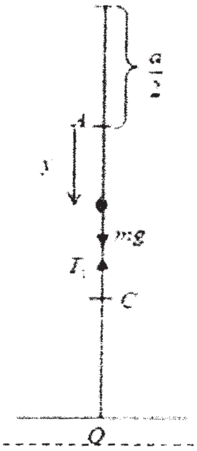
$\therefore$ විස්තාරය $= AB = \dfrac{a}{2}$ හා කාලාවර්තය $= \dfrac{2\pi}{\sqrt{\dfrac{g}{a}}}$ 5

එවිට $BC = \dfrac{a}{2}$ 5 $OC = OB - BC = 3a - \dfrac{a}{2} = \dfrac{5a}{2}$ 5

A සිට C දක්වා කාලය $= \dfrac{1}{2} \times$ කාලාවර්තය $= \pi\sqrt{\dfrac{a}{g}}$ 5

5

30



P අංශුව සඳහා, $\downarrow \underline{F = ma}$

$$-T_1 + mg = m\ddot{y} \quad 10$$

$$5 \quad -\frac{8mg}{4a}\left(y+\frac{a}{2}\right)+mg = m\ddot{y}$$

සුළු කිරීම - 5

$$\ddot{y} = -\frac{2g}{a}y \text{ .... (i)}$$

$\boxed{20}$

$$y = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t \text{ .... (ii)}$$

$$\dot{y} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t \text{ .... (iii)} \quad 5$$

$$\ddot{y} = -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t) \quad 5$$

$$= -\omega^2 y \quad 5$$

(i) සමග සැසඳීමෙන්, $\omega = \sqrt{\frac{2g}{a}}$ ලැබේ. 5

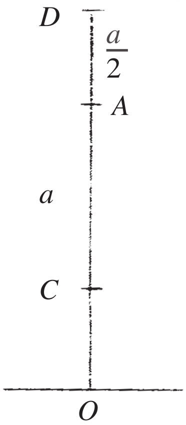
C හිදී P ට අදාලව $t = 0$ යැයි ගනිමු .

5 $\because t = 0$ විට $y = a$, (ii) $\Rightarrow a = \alpha$ 5

5 $\because t = 0$ විට $\dot{y} = 0$, (iii) $\Rightarrow \beta = 0$ 5

$\therefore \; y = a\cos\omega t$

$\boxed{40}$



C සිට D දක්වා ගතවන කාලය t_1 යැයි ගනිමු .

$\because t = t_1$ විට $y = -\frac{a}{2}$, $-\frac{a}{2} = a\cos\omega t_1$ ලැබේ. 5

$$\omega t_1 = \frac{2\pi}{3} \quad 5$$

$$\therefore \; t_1 = \frac{2\pi}{3}\cdot\sqrt{\frac{a}{2g}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{2a}{g}} \quad 5$$

$\boxed{15}$

$t = t_1$ විට (D ලක්ෂ්‍යයේ දී) : $\dot{y} = -a\omega\sin\omega t_1 = -a\sqrt{\frac{2g}{a}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{\frac{3ga}{2}}$ 5

අවශ්‍ය වේගය $= \sqrt{\frac{3ga}{2}}$ 5

$\boxed{10}$

14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) $ABCD$ යනු $\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ වන පරිදි වූ ත්‍රපීසියමක් යැයි ගනිමු. තව ද $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$ හා $\overrightarrow{AD} = \mathbf{q}$ යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ වන පරිදි BC මත E ලක්ෂ්‍යය පිහිටයි. AE හා BD වල ඡේදන ලක්ෂ්‍යය වන F මගින් $\overrightarrow{BF} = \lambda\overrightarrow{BD}$ යන්න සපුරාලයි; මෙහි $\lambda(0 < \lambda < 1)$ නියතයකි. $\overrightarrow{AE} = \frac{5}{6}\mathbf{p} + \frac{1}{3}\mathbf{q}$ බව හා $\overrightarrow{AF} = (1-\lambda)\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q}$ බව පෙන්වන්න.

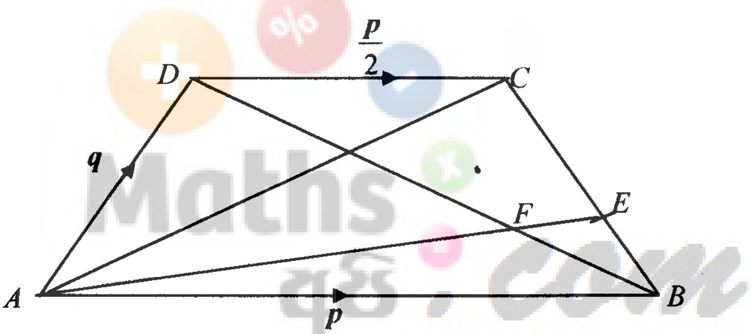
ඒ නයින්, λ හි අගය සොයන්න.

(*b*) $ABCD$ යනු පැත්තක දිග මීටර a වූ සමචතුරස්‍රයක් යැයි ගනිමු. විශාලත්ව නිව්ටන $4, 6\sqrt{2}, 8, 10, X$ හා Y වූ බල පිළිවෙළින් AD, CD, AC, BD, AB හා CB දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. පද්ධතිය $\overrightarrow{OE}$ දිගේ ක්‍රියාකරන තනි සම්ප්‍රයුක්තයකට ඌනනය වේ; මෙහි O හා E යනු පිළිවෙළින් AC හා CD වල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය වේ. X හා Y හි අගයන් සොයා, සම්ප්‍රයුක්තයේ විශාලත්වය නිව්ටන $4K$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $K = 2-\sqrt{2}$ වේ.

F යනු $OAFD$ සමචතුරස්‍රයක් වන පරිදි වූ ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. ඉහත බල පද්ධතියට තුල්‍ය වන, එකක් $\overrightarrow{AD}$ දිගේ ද අනෙක F ලක්ෂ්‍යය හරහා ද වන, **බල දෙක** සොයන්න.

බල පිහිටන තලයේ $ABCD$ අතට ක්‍රියාකරන ඝූර්ණය නිව්ටන මීටර $6Ka$ වන බල යුග්මයක් මුල් පද්ධතියට එකතු කරනු ලැබේ. නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි ක්‍රියා රේඛාව සොයන්න.

(a)



$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = q + \frac{p}{2} \quad 5 \quad 5$$

$$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = -p + \left(q + \frac{p}{2}\right) = q - \frac{p}{2} \quad 5 \quad 5 \quad 5$$

$$\therefore \ \overrightarrow{BE} = \frac{q}{3} - \frac{p}{6} \quad 5$$

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = p + \left(\frac{q}{3} - \frac{p}{6}\right) \quad 5 \qquad = \frac{5p}{6} + \frac{q}{3} \quad 5$$

$\boxed{40}$

$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} \quad 5$$
$$= p + \lambda\overrightarrow{BD}$$
$$= p + \lambda(q - p) = (1-\lambda)p + \lambda q \quad 5$$

$\boxed{10}$

$$\overrightarrow{AF} = k\overrightarrow{AE}$$ 5

$$(1-\lambda)\mathbf{p} + \lambda\mathbf{q} = \frac{k}{6}[5\mathbf{p} + 2\mathbf{q}]$$ 5

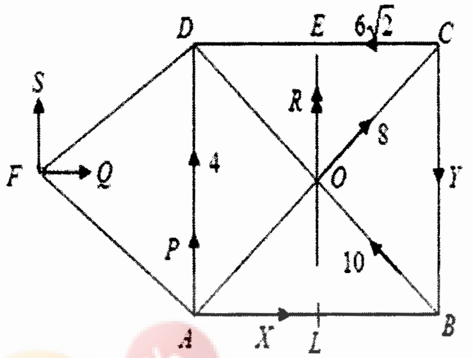
5 $\quad 1-\lambda = \dfrac{5k}{6}$

5 $\quad \lambda = \dfrac{2k}{6}$

$$\left.\begin{array}{l} 1-\lambda = \frac{5k}{6} \\ \lambda = \frac{2k}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda = \frac{2}{7}$$ 5

25

(b)



10

විභේදනයෙන්, $\rightarrow X - 6\sqrt{2} - \dfrac{10}{\sqrt{2}} + \dfrac{8}{\sqrt{2}} = 0$ 5

$\Rightarrow X = 6\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - 4\sqrt{2} \quad = 7\sqrt{2} \;\; N$ 5

O වටා සූර්ණය ගැනීමෙන් $\Rightarrow X \times \dfrac{a}{2} - Y \times \dfrac{a}{2} + 6\sqrt{2} \times \dfrac{a}{2} - 4 \times \dfrac{a}{2} = 0$ 10

$Y = 7\sqrt{2} + 6\sqrt{2} - 4 = 13\sqrt{2} - 4 \;\; N$ 5

සම්ප්‍රයුක්තය $= 4 - Y + 4\sqrt{2} + 5\sqrt{2}$ 5

5

$= 4 - 13\sqrt{2} + 4 + 9\sqrt{2} \quad = 4(2-\sqrt{2}) \quad = 4K \;\; N \;\; . \uparrow$ මෙහි $K = 2 - \sqrt{2}$ වේ .

45

$\longrightarrow \quad Q = 0$

$\uparrow \quad P + S = 4K$ 5

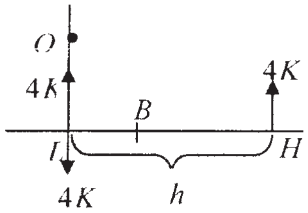
F $\quad 4K \times a \;\; = P \times \dfrac{a}{2}$ 5

$\therefore P = 8K \;\; N$ හා $\quad S = -4K$

5 $\quad$ 5

20

$\therefore$ F හිදී බලය $= 4K \;\; N \downarrow$ හා $\overrightarrow{AD}$ දිගේ බලය $= 8K \;\; N \uparrow$.



$\curvearrowleft O \qquad 4Kh = 6Ka$

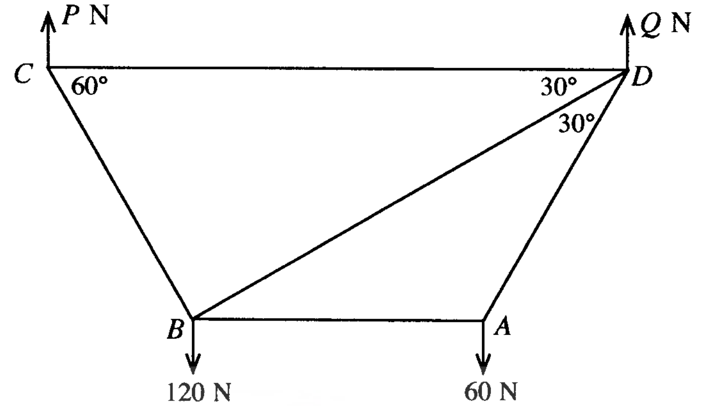
$$h = \frac{3a}{2}\ m \qquad 5$$

නව පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයෙහි ක්‍රියා රේඛාව: දික්කල AB රේඛාව මත $BH = a$ වන පරිදිවූ H ඔස්සේ BC ට සමාන්තරව පිහිටයි. $\boxed{10}$

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) ඒකක දිගක බර w බැගින් වූ ද $AB = AD = l\sqrt{3}$ හා $BC = DC = l$ වූ ද AB, BC, CD හා DA ඒකාකාර දඬු හතරක් $ABCD$ රාමු සැකිල්ලක් සාදන පරිදි, ඒවායේ කෙළවරවලින් සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. දිග $2l$ වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් A හා C සන්ධි සම්බන්ධ කර ඇත. රාමු සැකිල්ල A සන්ධියෙන් එල්ලනු ලැබ සිරස් තලයක සමතුලිත ව එල්ලෙයි. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{wl}{4}\left(5+\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

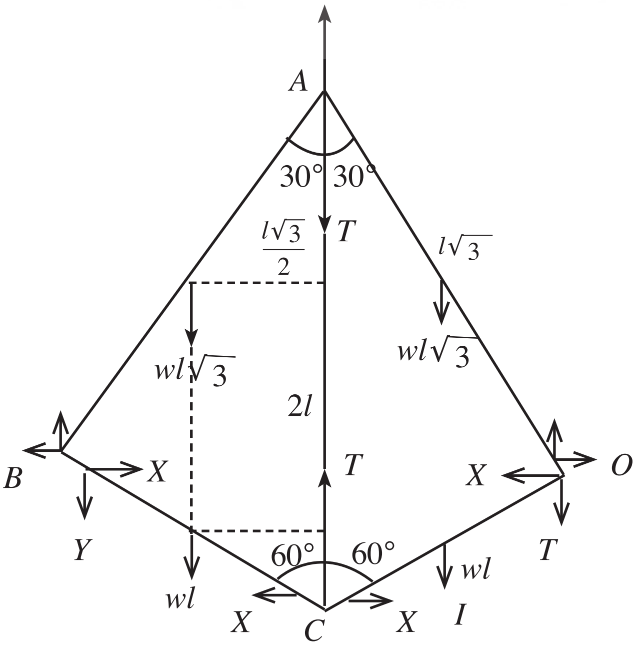
(*b*)



අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කරන ලද AB, AD, BC, BD හා CD සැහැල්ලු දඬු පහක රාමු සැකිල්ලක් දී ඇති රූපයෙන් නිරූපණය වේ. A හා B හි දී පිළිවෙළින් 60 N හා 120 N භාර දරන අතර AB හා CD දඬු තිරස් ව ඇතිව රාමු සැකිල්ල සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ පිළිවෙළින් C හා D හි දී යෙදූ P N හා Q N සිරස් බල දෙකක් මගිනි. බෝ අංකනය යෙදීමෙන්, ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් අඳින්න.

ඒ නයින්, දඬු පහේ ම ප්‍රත්‍යාබල, ඒවා ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් ප්‍රකාශ කරමින්, සොයන්න.

(*a*)



සමමිතිය 5

රූපය 5

AB හා BC සඳහා $A\curvearrowright$ $\quad wl(1+\sqrt{3})\times\frac{l\sqrt{3}}{4} - X\times 2l = 0$ (10) $\Rightarrow X = \frac{(1+\sqrt{3})\sqrt{3}}{8}wl$ (5)

CD සඳහා $C\curvearrowleft$ $\quad X\times\frac{l}{2} - Y\times\frac{l\sqrt{3}}{2} - wl\times\frac{l\sqrt{3}}{4} = 0$ (10)

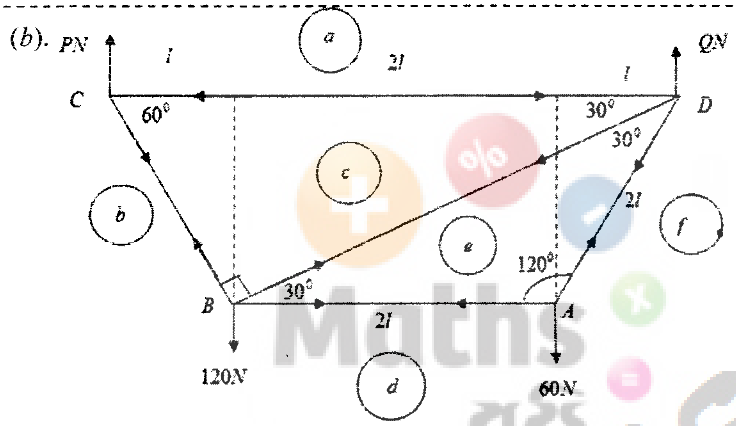
$$Y = \frac{1}{2\sqrt{3}}\left[2X - wl\sqrt{3}\right] = \frac{wl}{2\sqrt{3}}\left[\frac{3+\sqrt{3}}{4} - \sqrt{3}\right] \quad (5)$$

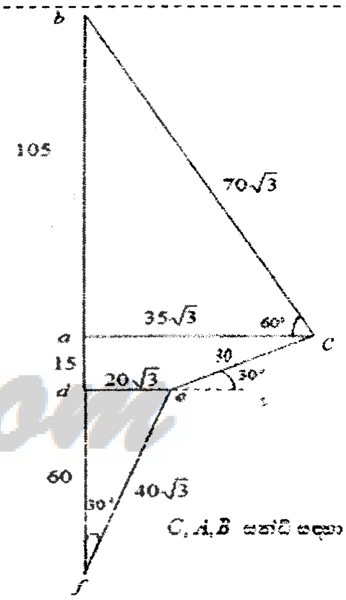
$$= \frac{wl}{8\sqrt{3}}\left(3-3\sqrt{3}\right) = \frac{wl}{8}\left(\sqrt{3}-3\right)$$

BC හා CD සඳහා $\uparrow$ $\quad T - 2wl - 2Y = 0$ (10)

(5) $T = 2wl + \frac{wl}{4}\left(\sqrt{3}-3\right) = \frac{wl}{4}\left[8+\sqrt{3}-3\right] = \frac{wl}{4}\left(5+\sqrt{3}\right)$ (5) $\quad \boxed{60}$

(b).





C, A, B සන්ධි සඳහා ප්‍රත්‍යාබල සටහන

$D\curvearrowright$ $\quad P\times 4l = 120\times 3l + 60\times l$

$P = 105N$

ප්‍රත්‍යාබල සටහන නොමැතිව P හෝ Q සොයා ඇති නම් (10) ක් වෙන් කරන්න. $\quad \boxed{40}$

දණ්ඩ	විශාලත්වය	ආතති / තෙරපුම්	
CD (ca)	$35\sqrt{3}$	තෙරපුම්	10
BC (bc)	$70\sqrt{3}$	ආතති	10
BD (ec)	30	ආතති	10
AB (ed)	$20\sqrt{3}$	ආතති	10
AD (fe)	$40\sqrt{3}$	ආතති	10

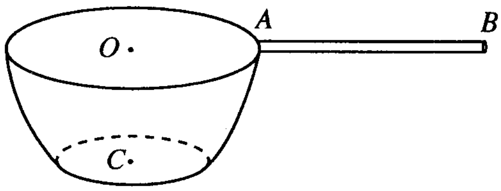
$\boxed{50}$

16 වන ප්‍රශ්නය

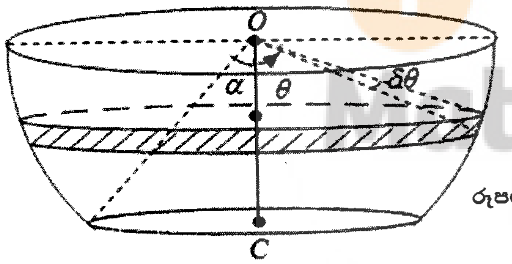
16. අරය a හා පෘෂ්ඨීක ඝනත්වය σ වූ ඒකාකාර කුහර අර්ධගෝලීය කබොලක් එහි වෘත්තාකාර ගැටියෙහි තලයට සමාන්තර වූ ද O කේන්ද්‍රයේ සිට $a\cos\alpha$ දුරකින් වූ ද තලයකින් කැපූ විට ලැබෙන ඡින්නකයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටන බව අනුකලනයෙන් පෙන්වන්න; මෙහි C යනු කුඩා වෘත්තාකාර ගැටියෙහි කේන්ද්‍රය වේ.

එම σ පෘෂ්ඨීක ඝනත්වය ම සහිත අරය $a\sin\alpha$ වූ තුනී ඒකාකාර වෘත්තාකාර තැටියක දාරය ඉහත ඡින්නකයේ කුඩා වෘත්තාකර ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර භාජනයක් සාදා ඇත. මෙම භාජනයෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය, OC මත O සිට $\left(\dfrac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)a\cos\alpha$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$ යැයි ද භාජනයෙහි බර W යැයි ද ගනිමු. දිග b හා බර $\dfrac{W}{4}$ වූ සිහින් ඒකාකාර AB දණ්ඩක් මිටක් ලෙස, O, A හා B ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය වන පරිදි, රූපයේ දැක්වෙන අයුරින් භාජනයේ ගැටියට දෘඪ ලෙස සවිකර සාස්පානක් සාදා ඇත. සාස්පානෙහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සොයන්න.



සාස්පාන, මිටෙහි B කෙළවරෙන් නිදහසේ එල්ලා ඇති අතර, මිට යටි අත් සිරස සමග $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{7}\right)$ කෝණයක් සාදමින් සමතුලිතතාවයේ එල්ලෙයි. $3b=4a$ බව පෙන්වන්න.



සමමිතියෙන් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මත පිහිටයි. 5

O සිට ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයට දුර $\bar{x}$ යැයි ගනිමු.

රූපයේ දැක්වෙන අත්‍යනුක මුදුවේ බර

$$=(2\pi a\sin\theta)a\delta\theta\,\sigma g$$

$$=2\pi a^2\sigma g\sin\theta\,\delta\theta$$

10

එවිට $$\bar{x}=\frac{\int_{\alpha}^{\pi/2}2\pi a^2\sigma g\sin\theta\cdot a\cos\theta\,d\theta}{\int_{\alpha}^{\pi/2}2\pi a^2\sigma g\sin\theta\,d\theta}$$ 10

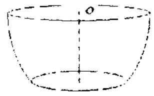
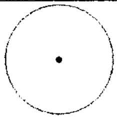
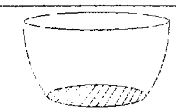
5

$$\bar{x}=a\frac{\int_{\alpha}^{\pi/2}2\sin\theta\cos\theta\,d\theta}{\int_{\alpha}^{\pi/2}2\sin\theta\,d\theta}=\frac{\left[-\dfrac{\cos2\theta}{2}\right]_{\alpha}^{\pi/2}}{\left[-2\cos\theta\right]_{\alpha}^{\pi/2}}a=\frac{1}{4}\frac{(1+\cos2\alpha)}{\cos\alpha}a=\frac{1}{2}\frac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha}a=\frac{1}{2}a\cos\alpha$$ 5

5

40

∴ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC හි මධ්‍ය ලක්ෂයේ පිහිටයි.

වස්තුව	බර	$\downarrow$ O සිට දුර
	$\sigma g\cdot 2\pi a^2\cos\alpha$ 5	$\frac{1}{2}a\cos\alpha$ 5
	$\sigma g\pi a^2\sin^2\alpha$ 5	$a\cos\alpha$ 5
	$\sigma g\pi a^2(2\cos\alpha+\sin^2\alpha)$ 5	$\bar{y}$

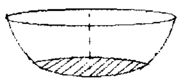
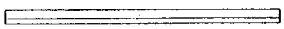
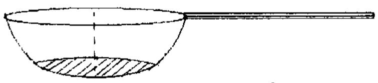
සමමිතියෙන් ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය OC මත O සිට $\bar{y}$ දුරකින් පිහිටයි; මෙහි 5

$$\sigma g\pi a^2(2\cos\alpha+\sin\alpha)\bar{y}=\sigma g2\pi a^2\cos\alpha\times\frac{1}{2}a\cos\alpha+\sigma g\pi a^2\sin^2\alpha\times a\cos\alpha \quad 10$$

$$\bar{y}=\frac{a\cos\alpha(\cos\alpha+\sin^2\alpha)}{(2\cos\alpha+\sin\alpha)}=\left(\frac{1+\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1+2\cos\alpha-\cos^2\alpha}\right)a\cos\alpha \quad 5$$

$\boxed{45}$

$\alpha=\frac{\pi}{3}$ විට $\bar{y}=\left(\frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}{1+1-\frac{1}{4}}\right)\frac{a}{2}=\frac{5a}{14}$ 5

වස්තුව	බර	AB සිට දුර	OC රේඛාවේ සිට දුර
	W	$\frac{5a}{14}$	0 5
	$\frac{W}{4}$	0 5	$a+\frac{b}{2}$ 5
	$\frac{5W}{4}$ 5	$\bar{Y}$	$\bar{X}$

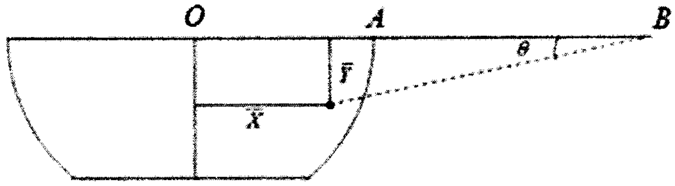
AB $\quad \dfrac{5W}{4}\overline{Y} = W\dfrac{5a}{14}$

$$\overline{Y} = \frac{2a}{7} \quad 10$$

OC $\quad \dfrac{5W}{4}\overline{X} = \dfrac{W}{4}\left(a + \dfrac{b}{2}\right)$

$$\overline{X} = \frac{2a+b}{10} \quad 10$$

$\boxed{45}$



$$\tan\theta = \frac{\overline{Y}}{\left(a+b-\overline{X}\right)} \quad 10$$

$$\frac{1}{7} = \frac{\frac{2a}{7}}{a+b-\left(\frac{2a+b}{10}\right)} = \frac{20a}{7[8a+9b]} \quad 5$$

$$8a + 9b = 20a$$

$$4a = 3b \quad 5$$

$\boxed{20}$

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක $P(B) > 0$ වන සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. B දී ඇතිවිට A හි අසම්භාව්‍ය සම්භාවිතාව වූ $P(A|B)$ අර්ථ දක්වන්න.

$P(A) = P(B)P(A|B) + P(B')P(A|B')$ බව පෙන්වන්න; මෙහි $0 < P(B) < 1$ වන අතර B' මගින් B හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක්වේ.

විශාල සමාගමක සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 80% ක් පිරිමි වන අතර 20% ක් ගැහැණු වේ. සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 57% කගේ ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වන අතර 32% කගේ එම සුදුසුකම අ.පො.ස. (උ.පෙළ) වේ. අනික් සියලු ම සේවා නියුක්තිකයෝ උපාධිධාරීහු වෙති. මෙම සමාගමේ ගැහැණු සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් 40% කගේ ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වන අතර 45% කගේ එම සුදුසුකම අ.පො.ස. (උ.පෙළ) වේ. සමාගමේ සේවා නියුක්තිකයන්ගෙන් එක් අයකු සසම්භාවී ලෙස තෝරා ගනු ලැබේ. එසේ තෝරාගනු ලැබූ සේවා නියුක්තිකයා,

(i) ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වූ ගැහැණු කෙනකු වීම,

(ii) ඉහළ ම අධ්‍යාපන සුදුසුකම අ.පො.ස. (සා.පෙළ) වූ පිරිමි කෙනකු වීම,

(iii) පිරිමි කෙනකු බව දී ඇති විට, එම සේවා නියුක්තිකයා උපාධිධාරියකු වීම,

(iv) උපාධිධාරියකු නොවන බව දී ඇති විට එම සේවා නියුක්තිකයා ගැහැණු කෙනකු වීම,

යන සිද්ධීන් එක එකෙහි සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ යන දත්ත කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව පිළිවෙළින් $\bar{x}$ හා σ_x^2 යැයි ගනිමු.

(i) $\sigma_x^2 = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$ බව පෙන්වන්න.

(ii) α හා β තාත්ත්වික නියත යැයි ගනිමු. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta)^2 = n\alpha^2\sigma_x^2 + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$ බව පෙන්වන්න.

$i = 1, 2, \ldots, n$ සඳහා $y_i = \alpha x_i + \beta$ යැයි ගනිමු. $\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta$ බව පෙන්වා, ඉහත (i) හා (ii) භාවිතයෙන් $\sigma_y^2 = \alpha^2\sigma_x^2$ බව **අපෝහනය** කරන්න; මෙහි $\bar{y}$ හා σ_y^2 යනු පිළිවෙළින් $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ කුලකයෙහි මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව වේ.

එක්තරා විභාගයක දී අපේක්ෂකයින් ලබා ගත් ලකුණුවල මධ්‍යන්‍යය 45 ක් වේ. මෙම ලකුණු, මධ්‍යන්‍යය 50 ක් හා සම්මත අපගමනය 15 ක් වන පරිදි ඒකජ ලෙස පරිමාණගත කළ යුතුව ඇත. පරිමාණගත ලකුණ වන 68 යන්නට අනුරූප මුල් ලකුණ 60 බව දී ඇත. මුල් ලකුණුවල සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

අපේක්ෂකයකු ලබා ගත් මුල් ලකුණ වූ m, ඉහත පරිමාණගත කිරීමෙන් අඩු නොවන බව තවදුරටත් දී ඇත. $m \geq 20$ බව පෙන්වන්න.

(a) $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ 5 05

5

$P(A)=P((A\cap B)\cup(A\cap B'))$ $[\because (A\cap B)\cup(A\cap B')=A\cap(B\cup B')=A\cap\Omega=A]$

$=P(A\cap B)+P(A\cap B')$ 5 $[\because A\cap B$ & $A\cap B'$ අන්‍යෝන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර බැවින්$]$

5 15

$$=\frac{P(B)P(A\cap B)}{P(B)}+\frac{P(B')P(A\cap B')}{P(B')}$$

$$=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

M – පිරිමි F – ගැහැණු

OL - උපරිම සුදුසුකම O/L

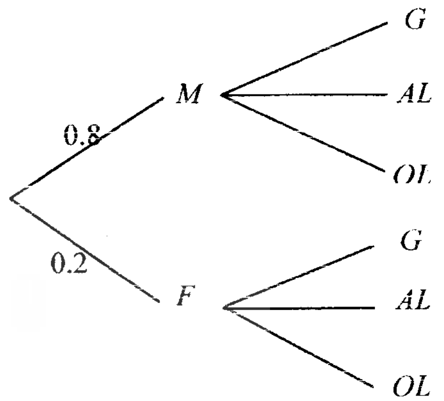
AL - උපරිම සුදුසුකම A/L

G - උපාධිධාරීන්

$P(M)=0.8$ $P(F)=0.2$

$P(OL)=0.57$ $P(AL)=0.32$ $P(G)=0.11$

$P(OL|F)=0.4$ $P(AL|F)=0.45$



(i) $P(F\cap OL)=P(F)P(OL|F)$ 5

5 $=0.2\times 0.4=0.08$ 10

5

(ii) $P(OL)=P(OL\cap M)+P(OL\cap F)$

$P(M\cap OL)=0.57-0.08=0.49$ 5 10

(iii) $P(G|M)=?$

$P(G)=P(M)P(G|M)+P(F)P(G|F)$ 5

$0.11=0.8\times P(G|M)+0.2\times\underbrace{(1-0.4-0.45)}_{0.15}$ 5

$P(G|M)=\dfrac{0.11-0.03}{0.8}=\dfrac{0.08}{0.8}=\dfrac{1}{10}=0.1$ 5 15

5

(iv) $P(F|G')=\dfrac{P(F\cap G')}{P(G')}=\dfrac{P(F)P(G'|F)}{1-P(G)}$

5 5

$=\dfrac{0.2\times(0.40+0.45)}{1-0.11}$ $=\dfrac{17}{89}.$ 5 20

---

17. (b) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ $\qquad$ $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$.

(i) $\sigma_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\bar{x} + \bar{x}^2\right)$ 5

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\bar{x}^2\sum_{i=1}^{n} 1 \qquad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - 2\bar{x}^2 + \frac{1}{n}\bar{x}^2 \times n$ 5

$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \bar{x}^2$. $\boxed{10}$

(ii) $\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta)^2 = \sum_{i=1}^{n}(\alpha^2 x_i^2 + 2\alpha\beta\ x_i + \beta^2)$

$= \alpha^2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + 2\alpha\beta\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n}\beta^2$ 5

5 $= \alpha^2\left\{n\sigma_x^2 + n\bar{x}^2\right\} + 2\alpha\beta\ n\ \bar{x} + n\beta^2$ as $n\sigma_x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\bar{x}^2$

$= n\alpha^2\sigma_x^2 + n\left\{\alpha^2\bar{x}^2 + 2\alpha\beta\bar{x} + \beta^2\right\}$

$= n\alpha^2\sigma_x^2 + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$ 5 $\boxed{15}$

තවත් ක්‍රමයක් $\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta)^2 = \sum_{i=1}^{n}\left[\alpha(x_i - \bar{x}) + \alpha\bar{x} + \beta\right]^2$

$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\alpha^2(x_i - \bar{x})^2 + 2(\alpha\bar{x} + \beta)\alpha(x_i - \bar{x}) + (\alpha\bar{x} + \beta)^2\right\}$ 5

$= \alpha^2\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 + 2\alpha(\alpha\bar{x} + \beta)\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^{n}(\alpha\bar{x} + \beta)^2$

$= \alpha^2 n\sigma_x^2 + 2\alpha(\alpha\bar{x} + \beta)\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n}\bar{x}\right) + (\alpha\bar{x} + \beta)^2 n$ 5

$= n\alpha^2\sigma_x^2 + 2\alpha(\alpha\bar{x} + \beta)(n\bar{x} - n\bar{x}) + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$ 5 $\boxed{15}$

$= n\alpha^2\sigma_x^2 + n(\alpha\bar{x} + \beta)^2$.

$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i + \beta)$ 5 $\quad = \alpha\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\beta$

$= \alpha\bar{x} + \beta\frac{1}{n}n$

$= \alpha\bar{x} + \beta$. 5 $\boxed{10}$

$\because\ y_i = \alpha x_i + \beta$, by (ii)

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} = n\alpha^2\sigma_x^{\,2} + n\bar{y}^2 \quad 5$$

$$\therefore\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^{\,2} - \bar{y}^2 = \alpha^2\sigma_x^{\,2}$$

$\therefore$ (i)න්, $\sigma_y^{\,2} = \alpha^2\sigma_x^{\,2}.$ 5

10

ලකුණු කුලකය $\{x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$ යැයි ගනිමු.

$\bar{x} = 45$ බව දී ඇත.

පරිමාණගත ලකුණු $y_i = \alpha x_i + \beta$ යැයි ගනිමු. එවිට $\bar{y} = 50$ හා $\sigma_y^{\,2} = 15$ වේ.

$\bar{y} = \alpha\bar{x} + \beta \Rightarrow 50 = 45\alpha + \beta$ -------------- (i) 5

තවද, $y_i = 68$ වනවිට $x_i = 60$ බව දී ඇත.

$\Rightarrow 68 = 60\alpha + \beta$ ---------------- (ii) 5

(i) හා (ii) $\Rightarrow 15\alpha = 18$

$\therefore\ \alpha = \frac{6}{5}.$

$\beta = 50 - 45 \times \frac{6}{5} = -4$ 5

$\sigma_y^{\,2} = \alpha^2\sigma_x^{\,2} \Rightarrow 15 = \frac{6}{5}\sigma_x^{\,2}$

$\therefore\ \sigma_x^{\,2} = \frac{15 \times 5}{6} = 12.5$ 5

20

$x_i = m \Rightarrow y_i \geq m.$

$\Rightarrow \frac{6}{5}x_i - 4 \geq m$ 5

$\Rightarrow \frac{6}{5}m - 4 \geq m$

$\Rightarrow \frac{m}{5} \geq 4$ 5

$\Rightarrow m \geq 20.$

10

III කොටස

3.0 පිළිතුරු සැපයීමේ දී සැලකිලිමත් විය යුතු කරුණු හා යෝජනා :

3.1. පිළිතුරු සැපයීමේ දී සැලකිලිමත් විය යුතු කරුණු :

පොදු උපදෙස් :

- ප්‍රශ්න පත්‍රයේ ඇති මූලික උපදෙස් කියවා හොඳින් තේරුම් ගත යුතුය. එනම් එක් එක් කොටසින් කොපමණ ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාවකට පිළිතුරු සැපයිය යුතු ද කුමන ප්‍රශ්න අනිවාර්ය වේ ද කොපමණ ලකුණු ලැබේ ද කොපමණ කාලයක් ලැබේ ද යන කරුණු පිළිබඳව සැලකිලිමත් විය යුතු අතර, ප්‍රශ්න හොඳින් කියවා පිළිතුරු ඉදිරිපත් කිරීමට බලාපොරොත්තු වන ප්‍රශ්න පිළිබඳව නිරවුල් අවබෝධයක් ඇති කර ගෙන පිළිතුරු ලිවිය යුතුය.
- I පත්‍රයේත් II පත්‍රයේත් A කොටසෙහි සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.
- I පත්‍රයේත් II පත්‍රයේත් B කොටසෙහි ප්‍රශ්න 7න් තෝරා ගත් ප්‍රශ්න 5කට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.
- B කොටසෙහි සෑම ප්‍රධාන ප්‍රශ්නයක්ම අලුත් පිටුවකින් ආරම්භ කළ යුතුය.
- අයදුම්කරුගේ විභාග අංකය සෑම පිටුවකම අදාළ ස්ථානයේ ලිවිය යුතුය.
- ප්‍රශ්න අංක හා අනුකොටස් අංක නිවැරදිව ලිවිය යුතුය.
- සියලුම ප්‍රශ්න හොඳින් කියවා තෝරාගෙන පිළිතුරු ලිවිය යුතුය. ප්‍රශ්න යටතේ දී ඇති තොරතුරුත්, ලබා ගත යුතු පිළිතුරු හෝ සාධනය කළ යුතු ප්‍රතිඵල කවරේ ද යන්නත් පැහැදිලිව අවබෝධ කර ගත යුතුය.
- ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයීමේදී දී ඇති කාලය නිසි පරිදි කළමනාකරණය කර ගැනීමට වග බලා ගත යුතුය.
- පැහැදිලි අත් අකුරින් පිළිතුරු සැපයිය යුතුය. පිළිතුරු ලිවීමේදී නිල් පාට හෝ කළු පාට පෑන් පමණක් භාවිත කළ යුතුය. අනෙකුත් පාට පෑන් භාවිත කිරීමෙන් වැළකිය යුතුය.

විශේෂ උපදෙස් :

- රූප සටහන් ඇඳිය යුතු අවස්ථාවලදී ඒවා ඉතා පැහැදිලිව ඇඳ නම් කළ යුතුය. මෙහිදී රේඛාවල දිග හා කෝණවල විශාලත්ව සංසන්දනාත්මකව නිවැරදි රූපය හා අනුරූප වන සේ දැක්වීම අවශ්‍ය වේ. රූපසටහන්වල නිරවද්‍යතාව සහ සම්බන්ධතා දැකීමටත් ඒ ඇසුරින් පහසුවෙන් පිළිතුරු කරා එළඹීමටත් මහෝපකාරී වෙයි. රූප සටහන්වල තොරතුරු ඇතුළත් කිරීමේදී ද, නිරවද්‍යතාව කෙරෙහි වැඩි අවධානයක් යොමු කිරීම අත්‍යවශ්‍ය වේ. (නිදසුන : බල ලකුණු කිරීම)
- ගණනය කිරීම්වලදී එක් එක් පියවර පැහැදිලිව සඳහන් කළ යුතු අතර, අවශ්‍ය ස්ථානවලදී පියවර අතර සම්බන්ධය දැක්වෙන සමාන ලකුණු හෝ වෙනත් අදාළ සංකේත හෝ ලියා දැක්වීමට සැලකිලිමත් විය යුතුය. එක් පියවරක හෝ පිටුවක හෝ ඇති ප්‍රකාශන හා සමීකරණ ඊළඟ පියවරට හෝ පිටුවට පිටපත් කිරීමේදී ඒවායේ නිරවද්‍යතාව පිළිබඳව ඉතා සැලකිලිමත් විය යුතුය.
- අවශ්‍ය ස්ථානවලදී නිවැරදිව ඒකක භාවිත කළ යුතුය. අවශ්‍ය අවස්ථාවලදී නිවැරදි ඒකක පරිවර්තනය පිළිබඳව ද සැලකිලිමත් විය යුතුය.

★ ප්‍රස්තාර ඇඳීමේදී x හා y අක්ෂ නිවැරදිව නම් කර පරිමාණගත කළ යුතු අතර, අවශ්‍ය අවස්ථාවල ඒකක ද සඳහන් කළ යුතුය.

★ මූලික සමානුපාත පිළිබඳ සංකල්ප නැවත පරිශීලනය කළ යුතුය.

★ මූලික ජ්‍යාමිතිය පිළිබඳ දැනුම සහ අවබෝධය ලබා ගත යුතුය.

නිදසුන්: (1) සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණ
(2) රොම්බසයක ලක්ෂණ
(3) සවිධි ෂඩස්‍රයක / බහු අස්‍රයක ලක්ෂණ
(4) ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත විවිධ ප්‍රමේය
(5) සමරූපී ත්‍රිකෝණ
(6) වෘත්ත ආශ්‍රිත ප්‍රමේය
(7) සමමිති ගුණ

★ සාධකවලට බිඳිය හැකි වර්ගජ ප්‍රකාශන එකවරම සාධකවලට වෙන්කර ගැනීමේ හැකියාව ප්‍රගුණ කළ යුතුය.

★ දෛශික නිරූපණයේදී නිවැරදි සංකේත භාවිත කිරීමට සැලකිලිමත් විය යුතුය.

★ "එනයින් ලබා ගන්න", "අපෝහනය කරන්න", "සත්‍යාපනය කරන්න", "ව්‍යුත්පන්න කරන්න" වැනි යෙදුම් කෙරෙහි සැලකිලිමත් විය යුතු අතර, ඒ අනුව පිළිතුර කරා එළඹීමට වග බලා ගත යුතුය. 'එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ' යනුවෙන් සඳහන් අවස්ථාවලදී බහුල වශයෙන්ම පෙර ලබා ගත් ප්‍රතිඵලය භාවිත කර ඊට පසු ප්‍රතිඵලය ලබා ගැනීම වඩාත් පහසු වේ.

★ දී ඇති තොරතුරු භාවිතයෙන් නිගමනයකට එළඹිය යුතු අවස්ථාවලදී විලෝම ක්‍රියාවලිය ඉදිරිපත් කිරීම ලකුණු අහිමිවීමට හෝ අඩුවීමට හේතු වේ. එබැවින් ප්‍රශ්නය මගින් අපේක්ෂිත ආකාරයට පිළිතුර ඉදිරිපත් කළ යුතුය. එහෙත් "නම් ම පමණක්" හෝ "ම නම් පමණක්" සත්‍ය බව සාධනය කළ යුතු අවස්ථාවලදී විලෝම වශයෙන් ද ප්‍රතිඵලය ලැබෙන බව සනාථ වන පරිදි පිළිතුරු ඉදිරිපත් කළ යුතු වේ.

★ සෑම විටෙකදීම අවසාන පිළිතුර සරලම ආකාරයෙන් දැක්වීමට අවධානය යොමු කළ යුතුය. අවසාන පිළිතුර, ප්‍රශ්නයෙහි අසා ඇති ආකාරය අනුව පැහැදිලිව දැක්විය යුතුය.

★ අයදුම්කරුවන් තම ඉලක්කම්, සංකේත සහ අදහස් පැහැදිලිවත් නිවැරදිවත් ලියා දැක්වීමට අවධානය යොමු කළ යුතුය.

★ පිළිතුර කරා එළඹීමට අවශ්‍ය සුළු කිරීම් (සංඛ්‍යාමය, වීජීය හෝ ත්‍රිකෝණමිතික) කටුවැඩ ලෙස සැලකුව ද පිළිතුර සමඟම පසෙකින් ඉදිරිපත් කරන්න.

★ පිළිතුර සම්පූර්ණ කිරීමට නොහැකි අවස්ථාවලදී වුව ද ප්‍රශ්නයට පිළිතුර ලබා ගැනීමට අදාළ ඉදිරි පියවර ලියා දැක්වීම බොහෝවිට ඵලදායි විය හැකිය.

★ ප්‍රශ්නයක අග කොටස්වල පවා මුල් කොටස්වලින් ස්වාධීන වූ පහසු කොටස් තිබිය හැකි බැවින් ප්‍රශ්නයක මුල් කොටස අපහසු වුව ද ප්‍රශ්නය අත්හැර නොයා ඉතිරි කොටස් පිළිබඳව ද අවධානය යොමු කිරීම වැදගත් වේ.

★ සමහර විටෙක යම් අනුකොටසක් සාධනය නොකළ ද එම ප්‍රතිඵල අවශ්‍ය නම් යෙදීමෙන් ඉදිරි අනුකොටසක් සඳහා පිළිතුර ඉදිරිපත් කළ හැකිය.