අ.පො.ස.(උ.පෙළ) විභාගය - 2013

ඇගයීම් වාර්තාව

10 - සංයුක්ත ගණිතය

පර්යේෂණ හා සංවර්ධන ශාඛාව
ජාතික ඇගයීම් හා පරීක්ෂණ සේවාව,
ශ්‍රී ලංකා විභාග දෙපාර්තමේන්තුව.

2.1.3 I ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුරු, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය I පත්‍රය - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය භාවිතයෙන්, සියලු $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $\sum_{r=1}^{n} (2r+1) = n(n+2)$ බව සාධනය කරන්න.

$n = 1$ විට, ව. පැ. $= \sum_{r=1}^{1} (2r+1) = 3$ හා

ද. පැ. $= 1(1+2) = 3$

$\therefore$ $n = 1$ විට ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

ඕනෑම k ධන නිඛිලයක් ගෙන, $n = k$ සඳහා දී ඇති ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කරමු.

එනම් $\sum_{r=1}^{k} (2r+1) = k(k+2)$ 5

දැන් $\sum_{r=1}^{k+1} (2r+1) = \sum_{r=1}^{k} (2r+1) + [2(k+1)+1] = k(k+2) + 2k + 3$ 5

$= k^2 + 4k + 3 = (k+1)(k+3)$ 5

$\therefore$ දී ඇති ප්‍රතිඵලය $n = k$ ට සත්‍ය නම්, එය $n = k+1$ ට ද සත්‍ය වේ. $n = 1$ සඳහා දී ඇති ප්‍රතිඵලය සත්‍ය බව ඉහත පෙන්වා ඇත. ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව සියලු ධන නිඛිලමය n සඳහාම ප්‍රතිඵලය සත්‍ය වේ. 5

25

---

1 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 95%ක්ම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇතත් ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 51%කට සීමා වී තිබේ. එනම් එම අපේක්ෂකයින්ට සාමූහිකව හිමි කර ගත හැකිව ඇත්තේ ලැබිය හැකිව තිබූ උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණයෙන් අඩකට ආසන්න ප්‍රමාණයක් පමණි. සමහර අයදුම්කරුවන් සපයා තිබූ පිළිතුරුවල කැපී පෙනෙන දුර්වලතාවක් වූයේ $n = k$ (මෙහි k ධන නිඛිලයකි.) සඳහා ප්‍රතිඵලය සත්‍ය යැයි උපකල්පනය කිරීමේදී $\sum_{r=1}^{k} (2r+1) = k(k+2)$ වෙනුවට $\sum_{r=1}^{k} (2k+1) = k(k+2)$ ලෙස සදොස්ව ලියා තිබීමයි. තවද සාධනය සම්පූර්ණ කිරීම සඳහා පිළිතුර අවසානයේදී “ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය අනුව දී ඇති ප්‍රකාශය සත්‍ය බව” ලිවිය යුතුව තිබුණ ද බොහෝ පිළිතුරුවල ඒ බව සඳහන් නොවීම නිසා මුළු ලකුණු අහිමි වී තිබෙනු දක්නට ලැබිණි. “ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය” යොදා ගනිමින් දී ඇති ප්‍රතිඵලයක් ඕනෑම ධන නිඛිලයක් සඳහා සත්‍ය බව සාධනය කිරීමේ හැකියාව අයදුම්කරුවන් සතුව තිබුණ ද, එම ක්‍රියාවලියට අයත් පියවර සියල්ල නිවැරදිව, තර්කානුකූලව හා අනුපිළිවෙළින් ඉදිරිපත් කිරීමට සිසුන් හුරුවී නොතිබීම මෙම තත්ත්වයට හේතුවිය හැකිය. “ගණිත අභ්‍යුහන මූලධර්මය” යනු කුමක් දැයි සිසුනට නිවැරදිව අවබෝධ කරවීමේ වැදගත්කම විෂයය ඉගැන්වීමේදී අවධානයට යොමු විය යුතු වේ.

2 වන ප්‍රශ්නය

2. $\dfrac{2x+1}{3x-1} \geq 1$ අසමානතාව සපුරාලන x හි සියලු තාත්ත්වික අගය සොයන්න.

$$\frac{2x+1}{3x-1} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{2x+1}{3x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2x+1-(3x-1)}{3x-1} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{3x-1} \geq 0 \quad 5$$

5 5 5

	$x < \frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} < x < 2$	$2 < x$
$2-x$	(+)	(+)	(−)
$3x-1$	(−)	(+)	(+)
$\frac{2-x}{3x-1}$	(−)	(+)	(−)

විසඳුම් කුලකය $= \{x \in \mathbb{R} : \frac{1}{3} < x \leq 2\}$ 5

25

2 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් වැඩිම ප්‍රතිශතයක් එනම් 96%ක් පිළිතුරු සැපයීමට උත්සාහ කර ඇතත් මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 27%කට සීමා වී තිබේ. වීජීය අසමානතා විසඳීම පිළිබඳ මූලික මූලධර්ම ඇසුරෙන් මෙම ප්‍රශ්නයට ඉතා පහසුවෙන් හා ඉක්මනින් පිළිතුරු සපයා, ඊට හිමි ලකුණු 25ම ලබා ගත හැකිව තිබුණ ද, වීජීය අසමානතා විසඳීමේදී නිවැරදිව හා තාර්කිකව පියවරෙන් පියවර ඉදිරියට යාමේ අවශ්‍යතාව නොසැපිරීම, ලකුණු අඩුවීමට හේතු වී තිබූ බව දක්නට ලැබුණි. නිසැකයෙන්ම ධන ව නොපවතින රාශියකින් අසමානතාවක දෙපසම ගුණ කිරීම (හරස් ගුණ කිරීම) බොහෝ අයදුම්කරුවන් විසින් කරන ලද බරපතල වරදකි. දී ඇති අසමානතාව විසඳීමේදී $3x-1=0$ වන විට එහි වම් පස අර්ථ විරහිත වන නිසා $3x-1>0$ වන අවස්ථාවත් $3x-1<0$ වන අවස්ථාවත් (එනම් $x > \frac{1}{3}$ සහ $x < \frac{1}{3}$) වෙන වෙනම සැලකීම අත්‍යවශ්‍ය වෙයි. $x = \frac{1}{3}$ වන විට අසමානතාව නොපවතින බව සමහර අයදුම්කරුවන්ගේ අවධානයට යොමුව නැති නිසා විසඳුම් කුලකය ලිවීමේදී පවා $x = \frac{1}{3}$ ද විය හැකි ලෙස ගෙන තිබිණි. $x \neq \frac{1}{3}$ විය යුතු බව අවබෝධ කරගෙන නොතිබීම ඊට හේතුව වෙයි. ලකුණු දීමේ පටිපාටියේ දැක්වෙන ඉහත ක්‍රමයට අමතරව වෙනත් ක්‍රම භාවිත කිරීමෙන් වුව ද අසමානතාවෙහි විසඳුම් ලබා ගැනීමේ හැකියාව තිබිණි. ව්‍යුත්පන්න කර ගනු ලබන ප්‍රකාශයෙහි විචලනය පිරික්සීමෙන් අනතුරුව නිවැරදි විසඳුම් කුලකය පිළිතුරු ලෙස ඉදිරිපත් කිරීමට සිසුන් පුරුදු වීම ද අවශ්‍ය වේ.

3 වන ප්‍රශ්නය

3. සියලු $n \in \mathbb{Z}^{+}$ සඳහා අපරිමිත ශ්‍රේණියක පළමු පද n හි එකතුව $6 - \dfrac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ මගින් දෙනු ලැබේ. මෙම ශ්‍රේණියෙහි n වෙනි පදය සොයා, ශ්‍රේණිය, අභිසාරී ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් බව පෙන්වන්න.

$n \in \mathbb{Z}^{+}$ සඳහා ශ්‍රේණියේ n වෙනි පදය a_n සහ $S_n = 6 - \dfrac{2^{n+1}}{3^{n-1}}$ ලෙස ගනිමු.

එවිට $a_n = S_n - S_{n-1}$ 5

$$= \left\{6 - \frac{2^{n+1}}{3^{n-1}}\right\} - \left\{6 - \frac{2^{n}}{3^{n-2}}\right\}$$

$$= \frac{2^{n}}{3^{n-2}} \left\{-\frac{2}{3} + 1\right\} \quad 5$$

$$= \frac{2^{n}}{3^{n-2}} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \quad 5$$

$\therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ යනු පළමුවන පදය 2 සහ පොදු අනුපාතය $\dfrac{2}{3}$ වන ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියකි. 5

$\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ බැවින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ. 5 $\boxed{25}$

Maths අපි .com

3 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් අවම ප්‍රතිශතයක් එනම් 73%ක් පමණක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව ද 9% තරම් අවම මට්ටමකට පත්ව තිබීම දැඩි අවධානයට යොමු වීම අත්‍යවශ්‍ය වේ. මෙම ප්‍රශ්නය තුළ අඩංගු ගැටලුව ලෙස සැලකිය හැක්කේ මුල් පද n හි ඓක්‍යය ඇසුරෙන් ප්‍රකාශිත ශ්‍රේණියක ලාක්ෂණික හඳුනාගැනීමයි. ශ්‍රේණියක මුල් පද n හි ඓක්‍යය දී ඇති විට n වන පදය සොයා ගැනීමේ සරල උපක්‍රමය, එනම්, $S_n - S_{n-1} = T_n$ යන්න භාවිත කළ හැකි බව දැන සිටීම ඒ සඳහා අවශ්‍ය වේ. අනතුරුව, ශ්‍රේණියේ n වන පදය T_n යන්න ar^{n-1} ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කළ විට අපරිමිත ශ්‍රේණිය ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් වන බව ද එහි පොදු අනුපාතය r, $|r| < 1$ අසමානතාව සපුරාලන විට ගුණෝත්තර ශ්‍රේණිය අභිසාරී වන බව ද අපේක්ෂකයින් දැන සිටිය යුතු අතර එහි නොවක් භාවිතයක් ලෙස මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම සැලකිය හැකි වේ.

සමහර අපේක්ෂකයන් ශ්‍රේණියේ පදවල එකතුවට පිළිවෙළින් $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$ ආදේශයෙන් S_1, S_2, S_3, S_4 සොයා එමගින් ශ්‍රේණියේ මුල් පද තුන ලබාගෙන, එම ශ්‍රේණිය ගුණෝත්තර ශ්‍රේණියක් බවට කරුණු ඉදිරිපත් කර තිබූ නමුදු එය ප්‍රමාණවත් සාධනයක් ලෙස නොසැලකිය හැකි වේ. සමහර අපේක්ෂකයන් $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = 6$ (පරිමිත) බව පෙන්වීම මගින් ශ්‍රේණිය අභිසාරී බව පෙන්වීම පිළිගත හැකි වේ.

4 වන ප්‍රශ්නය

4. $a \in \mathbb{R}$ යැයි ගනිමු. $\left(x + \dfrac{a}{x^3}\right)^{20}$ හි ද්විපද ප්‍රසාරණයෙහි x වලින් ස්වායත්ත පදය $\dfrac{969}{2}$ වේ.

a හි අගය සොයන්න.

ද්විපද ප්‍රමේයයට අනුව,

$$\left(x + \frac{a}{x^3}\right)^{20} = \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \, x^{20-r} \left(\frac{a}{x^3}\right)^r$$ මෙහි $r = 0, 1, 2, ..., 20$ සඳහා ${}^{20}C_r = \dfrac{20!}{r!\,(20-r)!}$ වේ. 5

$$= \sum_{r=0}^{20} {}^{20}C_r \, a^r x^{20-4r}$$

x වලින් ස්වායත්ත පදය සඳහා $20 - 4r = 0$

$\therefore r = 5$ 5

x වලින් ස්වායත්ත පදය $\dfrac{969}{2}$ නිසා, ${}^{20}C_5 \, a^5 = \dfrac{969}{2}$ 5

$$\Leftrightarrow \frac{20!}{15!5!} a^5 = \frac{969}{2} \Leftrightarrow a^5 = \frac{1}{32} \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

5 5

$\boxed{25}$

Maths අපි.com

---

4 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අයදුම්කරුවන්ගෙන් 85%ක් මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සපයා තිබූ නමුදු එහි පහසුතාව 33%කට සීමා වී තිබිණි. බොහෝ අපේක්ෂකයන් ප්‍රසාරණයෙහි සාධාරණ පදය නිවැරදිව ලියා තිබූ නමුත් එහි සාධාරණ පදය ${}^{20}C_r \, a^r x^{20-4r}$ බව නිවැරදිව ලබා නොගැනීමත්, x වලින් ස්වායත්ත පදය සඳහා $r = 5$ බව නිවැරදිව ලබාගත් සමහර අපේක්ෂකයක් පවා ${}^{20}C_5$ යන්න නිවැරදිව සුළු නොකිරීමත් නිසා ලකුණු අහිමි කර ගෙන තිබිණි. ඉතා අඩු පියවර ගණනකින් නිවැරදි පිළිතුර කරා ඉක්මනින් ළඟා විය හැකි මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයා උපරිම ලකුණු ප්‍රමාණයක් උපයා ගැනීම කෙරෙහි අපේක්ෂකයන් යොමු විය යුතු වේ.

5 වන ප්‍රශ්නය

5. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}} \times \left[\frac{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}}\right] \quad 5$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{2x^2} \left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right) \quad 5$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2} \left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right) \quad 5$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1}{4} \left[\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\left(\frac{x}{2}\right)}\right]^2 \left(\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4} \times 1^2 \times (2) = \frac{1}{2}$$

5 5

25

---

5 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

මෙම ප්‍රශ්නය සඳහා අපේක්ෂකයන්ගෙන් 94%ක්ම පිළිතුරු සපයා තිබූ අතර පහසුතාව 51%ක් විය. මෙය පහසුතාව වැඩිතම ප්‍රශ්න දෙක අතුරෙන් එකකි. වීජීය හා ත්‍රිකෝණමිතික සංයුක්ත ශ්‍රිතයක සීමාව සෙවීම පිළිබඳ දැනුම භාවිතයෙන් පිළිතුරු සැපයිය යුතු මෙම ප්‍රශ්නයේදී සීමාව පිළිබඳ නීති නිවැරදිව භාවිත කර නොතිබීම සාර්ථක පිළිතුරු නොලැබීමට හේතුවක් විය. සීමාව පිළිබඳ මූලික ප්‍රමේයවල භාවිත ඇතුළත් අභ්‍යාසවලදී එම එක් එක් ප්‍රමේයය යොදා ගැනෙන අවස්ථා පැහැදිලිව නිරූපණය වන සේ ශ්‍රිතය සකස් කර ගැනීමේ පියවර පටිපාටිය නිවැරදිව ලියා දැක්විය යුතු වුව ද බොහෝ සිසුන්ගේ පිළිතුරුවල ඒ බව දක්නට නොලැබීම අඩුපාඩුවක් මෙන්ම මුළු ලකුණු නොලැබීමට හේතුවක් ද විය. පිළිතුරෙහි අන්තර්ගත පියවර අනුක්‍රමය මගින්, නිගමනවලට එළඹීම සඳහා භාවිත ප්‍රමේය අනුපිළිවෙළින් නිරූපණය කෙරෙන මෙවැනි අභ්‍යාසවලදී විධිමත් ලෙස පිළිතුර ඉදිරිපත් කිරීමෙන් උපරිම ලකුණු ලබා ගැනීම කෙරෙහි අයදුම්කරුවන්ගේ අවධානය යොමු විය යුතු වේ.

Maths අපි .com

6 වන ප්‍රශ්නය

6. $\dfrac{d}{dx}\left\{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right\}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $\int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx$ සොයන්න.

5 5

$$\frac{d}{dx}\left\{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right\}=\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+1})}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}\right)+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$$=\frac{x}{(x+\sqrt{x^2+1})}\cdot\frac{(\sqrt{x^2+1}+x)}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad 5$$

$$=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\ln(x+\sqrt{x^2+1})$$

$\dfrac{d}{dx}\sqrt{x^2+1}=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ බැවින්,

$$\frac{d}{dx}\left\{x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}\right\}=\ln(x+\sqrt{x^2+1}) \qquad 5$$

$\therefore \int \ln(x+\sqrt{x^2+1})dx = x\ln(x+\sqrt{x^2+1})-\sqrt{x^2+1}+C,$ මෙහි C යනු අභිමත නියතයකි.

5

25

Maths අප.com

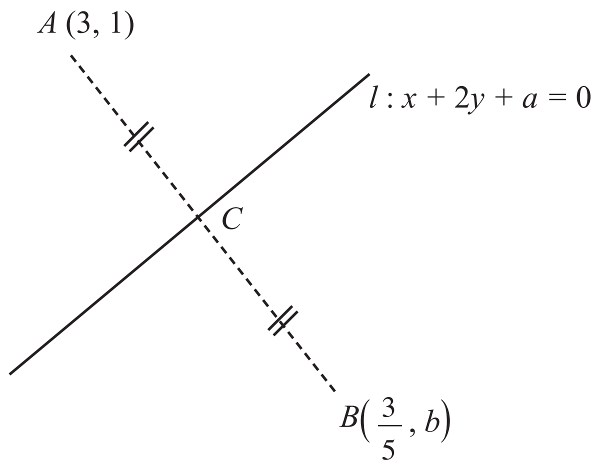
---

6 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයන්ගෙන් 90%ක් පිළිතුරු සපයා ඇති මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 36%කි. අවකලනයෙහි එන දාම නීතිය පිළිබඳව අවබෝධය ප්‍රමාණවත් නොමැතිවීම නිසා පූර්ණ වශයෙන් සාර්ථක පිළිතුරු ඉදිරිපත් කර තිබුණේ අල්ප වශයෙනි. අනුකලනයේ ඇති සම්මත ආකාර පිළිබඳ දැනුම අල්ප වීම ද ලකුණු අඩුවීමට බලපා ඇති තවත් කරුණකි. අනුකලනය කළ යුතු ප්‍රකාශනය සුදුසු පරිදි සකස් කර ගැනීමට නොහැකි වීම ද සාර්ථක පිළිතුරු නොලැබීමට හේතු වී තිබිණි. තවද අනිශ්චිත අනුකලනයකදී අභිමත නියතය සඳහන් කර නොතිබීම නිසා ද බොහෝ අපේක්ෂකයන්ට උපරිම ලකුණු ලබා ගැනීමට නොහැකි විය. අවකලනයක විලෝමය ලෙස ඉදිරිපත් කෙරෙන සරල අනුකල ආශ්‍රිත අභ්‍යාසවල නිරතවීමෙන් සිසුන් ලබන අත්දැකීම් මෙවැනි ප්‍රශ්නවලට සාර්ථකව පිළිතුරු සැපයීම සඳහා ඉතා ප්‍රයෝජනවත් වේ.

7 වන ප්‍රශ්නය

7. $(3, 1)$ ලක්ෂ්‍යයෙහි $x + 2y + a = 0$ සරල රේඛාව මත ප්‍රතිබිම්බය $\left(\frac{3}{5}, b\right)$ ලක්ෂ්‍යය වේ. මෙහි a හා b නියත වේ. a හා b හි අගයන් සොයන්න.



AB රේඛාවේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය C නම්,

$$C = \left(\frac{3 + \frac{3}{5}}{2}, \frac{1+b}{2}\right) \quad 5$$

C ලක්ෂ්‍යය l රේඛාව මත පිහිටන බැවින් $\frac{9}{5} + (1 + b) + a = 0$ 5

$\therefore a + b = -\frac{14}{5}$ ....(1)

$AB \perp l$ බැවින්, $\left(\frac{b - 1}{\frac{3}{5} - 3}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$ 5

$\therefore b - 1 = -\frac{24}{5}$

$b = -\frac{19}{5}$ 5

$(1) \Longrightarrow a = 1$ 5

25

---

7 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

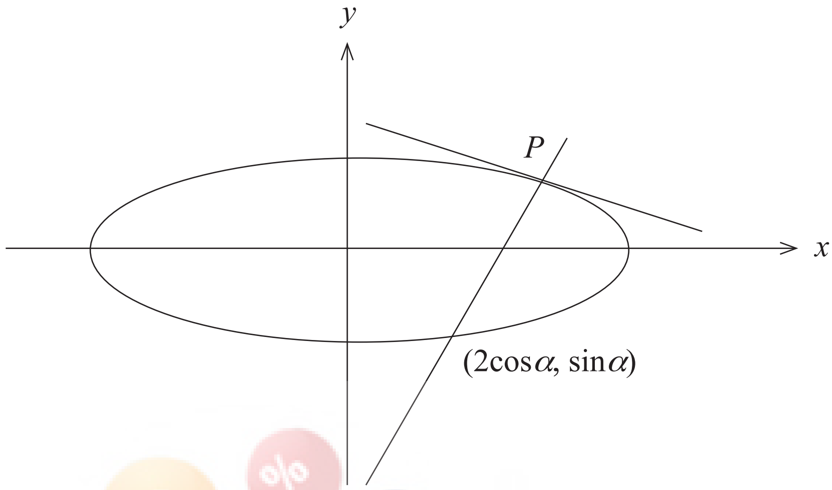
අයදුම්කරුවන්ගෙන් 89%ක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 32%කි. වීජීය ජ්‍යාමිතියෙහි එන සරල සිද්ධාන්ත ඇසුරෙන් පිළිතුරු සැපයිය හැකිව තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහිදී C හි ඛණ්ඩාංක b ඇසුරෙන් නිවැරදිව ලබාගෙන තිබුණ ද එම ඛණ්ඩාංක $x + 2y + a = 0$ හි ආදේශ කළ පසු a හා b අතර අනෙක් සම්බන්ධතාව ගොඩ නඟා ගැනීමට නොහැකිවීම හෝ නිවැරදිව සුළු කර නොතිබීම හෝ හේතුවෙන් a සහ b හි නිවැරදි අගය ලබා ගැනීමට බොහෝ අයදුම්කරුවන්ට නොහැකි වී තිබිණි. සරල රේඛාවක පරාමිතික නිරූපණය භාවිතයෙන් ද මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු ලබා ගත හැකිවේ. සරල රේඛාව පිළිබඳ මූලික සිද්ධාන්ත හුරු කරවීම සඳහා සරල අභ්‍යාසවල නිරතකරවීමෙන් මෙම දුර්වලතාව මඟ හරවා ගත හැකිය. මෙයට පිළිතුරු සැපයීමේදී අයදුම්කරුවන් මතකයේ තිබූ ප්‍රතිබිම්බය පිළිබඳ සූත්‍රය යොදා ගෙන විසඳා තිබූ අතර එයට වඩා මෙම ප්‍රශ්නයෙහි දී ඇති කරුණු අනුව රේඛාවක දෙපස ලක්ෂ්‍ය දෙක පිහිටන විට සපුරාලන අවශ්‍යතාව යොදා කදිම විසඳුම් ඉදිරිපත් කිරීමට උත්සාහ කිරීම මැනවි.

Maths අපි .com

8 වන ප්‍රශ්නය

8. $x = 2\cos\theta,\ y = 2\sin\theta,$ මගින් දෙනු ලබන වක්‍රය C යැයි ගනිමු. මෙහි θ යනු පරාමිතියකි. C වක්‍රයට $\theta = \frac{\pi}{4}$ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී වූ අභිලම්බයට, C වක්‍රය නැවත $\theta = \alpha$ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යයෙහි දී හමුවේ. $2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 3\sqrt{2} = 0$ බව පෙන්වන්න.

$x = 2\cos\theta,\ y = \sin\theta$



$\theta = \frac{\pi}{4}$ ට අනුරූප ලක්ෂ්‍යය P නම්,

$$P \equiv \left(\sqrt{2}\ ,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 2\sin\theta,\quad \frac{dy}{d\theta} = \cos\theta \quad (5) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{-\cos\theta}{2\sin\theta} \quad (5)$$

P ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රයට ඇඳි ස්පර්ශකයේ අනුක්‍රමණය $= -\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$ (5)

$\therefore$ P ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්භයේ අනුක්‍රමණය $= 2$

P ලක්ෂ්‍යයේදී වක්‍රයට ඇඳි අභිලම්භයේ සමීකරණය : $y - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\left(x - \sqrt{2}\right)$ (5)

$(2\cos\alpha, \sin\alpha)$ ලක්ෂ්‍යය මෙම රේඛාව මත පිහිටන බැවින්,

$$\sin\alpha - \frac{1}{\sqrt{2}} = 2(2\cos\alpha - \sqrt{2})$$

$$2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 4\sqrt{2} - \sqrt{2} = 0$$

$$2\sin\alpha - 8\cos\alpha + 3\sqrt{2} = 0 \quad (5)$$

25

8 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් 77%ක් පමණක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 31%කි. මෙම ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීමේදී, දෙනු ලබන වක්‍රයට එය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකදී ඇඳි අභිලම්බයේ සමීකරණය ලබා ගැනීමත්, දී ඇති වෙනත් ලක්ෂ්‍යයක් හරහා එම අභිලම්බය ගමන් කිරීම හේතුවෙන් එම ලක්ෂ්‍යයේ ඛණ්ඩාංක මගින් අභිලම්බයේ සමීකරණය තෘප්ත කිරීමත් භාවිතයෙන් දී ඇති සම්බන්ධතාව ගොඩ නැගිය යුතුව තිබිණි. මෙය ඉගෙනුම් ක්‍රියාවලිය තුළ නිතර හමුවන භාවිත අවස්ථාවක් වුව ද, පරාමිතික අවකලනය නිවැරදිව කර නොතිබීමත් පරාමිතියක් ඇසුරින් ඛණ්ඩාංක දෙනු ලැබූ ලක්ෂ්‍යයක් හරහා යන, දන්නා අනුක්‍රමණයක් සහිත සරල රේඛාවේ සමීකරණය ලබා ගැනීමේ දැනුම අඩුවීමත් පිළිතුරු සඳහා වන ලකුණු අඩුවීමට හේතු වී තිබිණි.

9 වන ප්‍රශ්නය

9. අරය ඒකක 1ක් වූ ද, කේන්ද්‍රය $x + y = 0$ සරල රේඛාව මත වූද, C වෘත්තයක්, $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බ ව ඡේදනය කරයි. C හි කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සොයන්න.

අවශ්‍ය කරන වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය $x + y = 0$ රේඛාව මත පිහිටන බැවින් එය t පරාමිතියක් ඇසුරින් $(t, -t)$ ලෙස ලිවිය හැකිය. මෙහි $t \in \mathbb{R}$. 5

කේන්ද්‍රය $(t, -t)$ සහ අරය ඒකක 1 වන වෘත්තයේ සමීකරණය,

$(x - t)^2 + (y + t)^2 = 1$ 5

$x^2 + y^2 - 2tx + 2ty + 2t^2 - 1 = 0$ 5

මෙය $x^2 + y^2 + 4y + 3 = 0$ වෘත්තය ප්‍රලම්බව ඡේදනය කරන බැවින්,

$2(t)(2) = (2t^2 - 1) + 3$ 5

එනම්, $2t^2 - 4t + 2 = 0$; $(t - 1)^2 = 0$

$\therefore$ $t = 1$ බැවින්, කේන්ද්‍රය $= (1, -1)$ 5

$\boxed{25}$

---

9 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් 85%ක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 31%ක් විය. ලකුණු දීමේ පටිපාටියේ අපේක්ෂිත ආකාරයට සපයන ලද පිළිතුරු ඉතාමත් දුර්ලභ විය. බොහෝ අපේක්ෂකයන් කේන්ද්‍රයේ ඛණ්ඩාංක සහ අරය ඇසුරින් වෘත්තයේ සමීකරණය ලබාගෙන තිබිණි. එහෙත් වෘත්ත දෙක ප්‍රලම්බ වීමට තිබිය යුතු අවශ්‍යතාව නිවැරදිව භාවිත කර නොතිබීම සාර්ථක පිළිතුරු අඩුවීමට හේතු වී තිබිණි.

10 වන ප්‍රශ්නය

10. $\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ හා $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ නම්, $\sin2\theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ හා $\tan2\theta = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$ බව පෙන්වන්න.

$\sin\theta = -\dfrac{1}{3}$ සහ $\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2}$ යැයි ගනිමු.

$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ බැවින්, $\cos^2\theta = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9}$ සහ $\cos\theta = \pm\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 5

$\pi < \theta < \dfrac{3\pi}{2} \implies \cos\theta < 0$ බැවින්, $\cos\theta = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ 5

දැන් $\sin2\theta = 2\cos\theta\sin\theta = 2\left(-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ 5

තවද, $\cos2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - \dfrac{2}{9} = \dfrac{7}{9}$ 5

$\tan2\theta = \dfrac{\sin2\theta}{\cos2\theta} = \left(\dfrac{4\sqrt{2}}{9}\right)\left(\dfrac{9}{7}\right) = \dfrac{4\sqrt{2}}{7}$ 5

25

---

10 වන ප්‍රශ්නයට පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ හා නිගමන :

අපේක්ෂකයින්ගෙන් 84%ක් පිළිතුරු සපයා තිබූ මෙම ප්‍රශ්නයෙහි පහසුතාව 29%කට සීමා වී තිබිණි. අපේක්ෂකයන් බොහෝ දෙනෙකු θ කෝණය තුන්වන වෘත්ත පාදයේ කෝණයක් බව හඳුනා නොගෙන එය සුළු කෝණයක් ලෙස සලකා සෘජුකෝණී ත්‍රිකෝණයක් ඇඳීමෙන් θහි කෝසයින් අගය ලබා ගෙන තිබිණි. එක් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයක් දී ඇති විට තවත් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයක් සෙවීමේදී $\cos^2\theta + \sin^2\theta \equiv 1$ සර්වසාම්‍යය භාවිත කිරීමට මෙන්ම θ කෝණය කුමන ප්‍රාන්තරයක පවතීද යන්න සලකා බලා ඒ අනුව එක් එක් ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාතයෙහි අගය ලබා ගැනීමේදී එම අගය ධන (+) ද (–) ද යන්න තීරණය කිරීමට ද සිසුන් හුරු කරවීමෙන් මෙම අඩුපාඩුව මඟ හරවා ගත හැකිය. වෘත්ත පාද නිවැරදිව හඳුනාගෙන නොතිබීම සාර්ථක පිළිතුරු නොලැබීමට හේතුවක් වී තිබිණි.

තවද බොහෝ අපේක්ෂකයන් ත්‍රිකෝණමිතික සර්වසාම්‍ය යෙදීම වෙනුවට සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක්, දෙන ලද කෝණයක් සඳහා නිර්මාණය කර එමගින් ඉතිරි ත්‍රිකෝණමිතික අනුපාත සෙවීම සාමාන්‍ය පුරුද්දක් බවට පත්වී තිබේ. දෙන ලද කෝණය සුළුකෝණයක් වන විට සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණයක් ඇසුරෙන් අනෙක් අනුපාත ලබා ගැනීම සුදුසු වන අතර අනෙකුත් කෝණ සඳහා එය පවතින වෘත්ත පාදකය අනුව සෘජුකෝණික ත්‍රිකෝණ සැලකිය හැකිය.

(10) සංයුක්ත ගණිතය I - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11.(*a*) $f(x) = ax^3 + bx^2 - 11x + 6$ යැයි ගනිමු. මෙහි $a, b \in \mathbb{R}$ වේ.
$(x-1)$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් වේ නම් හා $f(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය -6 නම්, a හා b වල අගයන් සොයන්න.
$f(x)$ හි අනෙක් ඒකජ සාධක දෙකත් සොයන්න.

(***b***) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද, γ හා δ යනු $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණයේ මූල යැයි ද ගනිමු. මෙහි $b, c, m, n \in \mathbb{R}$ වේ.

(i) b හා c ඇසුරෙන් $(\alpha - \beta)^2$ සොයා **ඒ නයින්**, m හා n ඇසුරෙන් $(\gamma - \delta)^2$ ලියා දක්වන්න.
$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ නම් $b^2 - 4c = m^2 - 4n$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(ii) $(\alpha - \gamma)(\alpha - \delta)(\beta - \gamma)(\beta - \delta) = (c-n)^2 + (b-m)(bn-cm)$ බව පෙන්වන්න.
$x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත්තේ $(c-n)^2 = (m-b)(bn-cm)$ ම නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න.
$x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kx + 10 = 0$ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් ඇත; මෙහි k යනු තාත්ත්වික නියතයකි. k හි අගයන් සොයන්න.

(*a*) $x-1$ යන්න $f(x)$ හි සාධකයක් බැවින්, $f(1) = a + b - 11 + 6 = 0, \ \therefore \ a + b = 5$ —— (1) 10

$f(x)$ යන්න $(x-4)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -6 බැවින්, $f(4) = 64a + 16b - 44 + 6 = -6$ 10

$\Longrightarrow 4a + b = 2$ —— (2)

(1) හා (2) න්, $a = -1, b = 6$ 5 $\boxed{25}$

10

දැන්, $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 11x + 6 = (x-1)(-x^2 + 5x - 6) = -(x-1)(x^2 - 5x + 6)$
$= -(x-1)(x-2)(x-3)$ 5

මේ අනුව අනෙක ඒකජ සාධක දෙක වන්නේ $(x-2)$ හා $(x-3)$ වේ. 5 $\boxed{20}$

(b)(i) α හා β යනු $x^2 + bx + c = 0$ වර්ගජ සමීකරණයේ මූල බැවින් $\alpha + \beta = -b$ (5) හා $\alpha\beta = c$ (5) වේ.

$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = b^2 - 4c$ 5 5 $\boxed{20}$

සැසඳීමෙන්, $(\gamma - \delta)^2 = m^2 - 4n$ 5 $\boxed{05}$

$\alpha + \gamma = \beta + \delta$ බැවින්, $\alpha - \beta = -(\gamma - \delta) \Longrightarrow (\alpha - \beta)^2 = (\gamma - \delta)^2 \Longrightarrow b^2 - 4c = m^2 - 4n$

5 5 5 $\boxed{15}$

(b)(ii) $(\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) = [\alpha^2 - \alpha(\gamma+\delta) + \gamma\delta][\beta^2 - \beta(\gamma+\delta) + \gamma\delta]$ 5

$= [\alpha^2 + m\alpha + n][\beta^2 + m\beta + n]$ 5

$= \alpha^2\beta^2 + \alpha\beta(\alpha+\beta)m + n(\alpha^2+\beta^2) + \alpha\beta m^2 + mn(\alpha+\beta) + n^2$ 5

$= c^2 - bcm + n(b^2 - 2c) + cm^2 - mnb + n^2$ 5

$= (c^2 - 2cn + n^2) + (b^2n - bcm - mnb + cm^2)$

$= (c-n)^2 + (b-m)(bn-cm)$ 5 $\boxed{25}$

$x^2 + bx + c = 0$ හා $x^2 + mx + n = 0$ යන වර්ගජ සමීකරණවලට පොදු මූලයක් පවතින්නේ,

$(\alpha = \gamma$ හෝ $\delta)$ හෝ $(\beta = \gamma$ හෝ $\delta)$ ම නම් පමණි. 5

$\Leftrightarrow \quad (\alpha-\gamma)(\alpha-\delta)(\beta-\gamma)(\beta-\delta) = 0$ 5

$\Leftrightarrow \quad (c-n)^2 + (b-m)(bn-cm) = 0$ 5

$\Leftrightarrow \quad (c-n)^2 = (m-b)(bn-cm)$ 5 $\boxed{20}$

$x^2 + 10x + k = 0$ හා $x^2 + kx + 10 = 0$ යන සමීකරණවලට පොදු මූලයක් පවතින්නේ නම් ම පමණක් $(c-n)^2 = (m-b)(bn-cm)$ 5

මෙහි $b = 10, c = k, m = k$ සහ $n = 10$ වේ. 5

$(k-10)^2 = (k-10)(100-k^2)$

$\Leftrightarrow \quad (k-10)[k^2 + k - 110] = 0$

$\Leftrightarrow \quad (k-10)(k-10)(k+11) = 0$ 5

එමගින් $k = 10$ හෝ $k = -11$ 5 $\boxed{20}$

---

12 වන ප්‍රශ්නය

12. (*a*) සිසුන් 15 ක ශිෂ්‍ය සභාවක් විද්‍යා සිසුන් 3 දෙනකුගෙන්, කලා සිසුන් 5 දෙනකුගෙන් හා වාණිජ සිසුන් 7 දෙනකුගෙන් සමන්විත ය. ව්‍යාපෘතියක වැඩ කිරීම සඳහා මෙම ශිෂ්‍ය සභාවෙන් සිසුන් 6 දෙනකු තෝරා ගැනීමට අවශ්‍ය ව ඇත.

(i) සිසුන් 15 දෙනාම තෝරා ගැනීම සඳහා සුදුසු නම්,

(ii) කිසියම් සිසුන් දෙදෙනකුට එකට වැඩ කිරීම සඳහා අවසර නොමැති නම්,

(iii) එක් එක් විෂය ධාරාවෙන් සිසුන් දෙදෙනකු බැගින් තේරීමට අවශ්‍ය නම්,

මෙය සිදු කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

ඉහත (iii) යටතේ තෝරා ගත් කණ්ඩායමක්, එම කණ්ඩායමෙහි විද්‍යා විෂය ධාරාවෙන් වූ සිසුන් දෙදෙනාට එක ළඟ වාඩිවීමට අවසර නොමැති නම්, වෘත්තාකාර මේසයක් වටේට වාඩි කළ හැකි වෙනස් ආකාර ගණන සොයන්න.

(*b*) $r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \sum_{r=1}^{n} U_r$ යැයි ගනිමු.

$r \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $U_r = \dfrac{A}{(3r-1)^2} + \dfrac{B}{(3r+2)^2}$ වන පරිදි A හා B නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, $n \in \mathbb{Z}^+$ සඳහා $S_n = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{(3n+2)^2}$ බව පෙන්වන්න.

$\sum_{r=1}^{\infty} U_r$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ ද? ඔබගේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

$\left| S_n - \dfrac{1}{4} \right| < 10^{-6}$ වන පරිදි වූ $n \in \mathbb{Z}^+$ හි කුඩාතම අගය සොයන්න.

(*a*) S A C

3 5 7

(i) $$ {}^{15}C_6 = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 91 \times 55 = 5005 $$

5 5 5

15

(ii) විශේෂ සිසුන් දෙදෙනාම අන්තර්ගත වන පරිදි තෝරා ගත හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\}$ $= {}^{13}C_4 = 715$ (5)

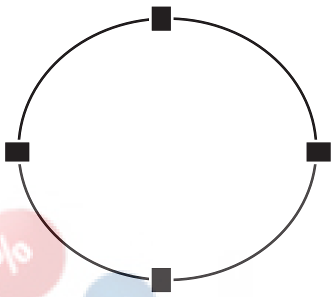
(10)

(iii) විශේෂිත සිසුන් දෙදෙනාම එකවර අන්තර්ගත නොවන පරිදි තෝරා ගත හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\}$ $= {}^{15}C_6 - {}^{13}C_4 = 5005 - 715 = 4290$

(5) (5) $\boxed{25}$

(iiii) එක් එක් විෂය ධාරාවෙන් සිසුන් දෙදෙනකු බැගින් තෝරා ගත හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\}$ $= {}^{3}C_2 \times {}^{5}C_2 \times {}^{7}C_2 = 3 \times 10 \times 21 = 630$

(10) (5) $\boxed{15}$



කලා සිසුන් දෙදෙනකු හා වාණිජ සිසුන් දෙදෙනකු (එනම් විද්‍යා නොවන සිසුන් හතර දෙනා) වෘත්තාකාර මේසයක් වටා වාඩි කරවිය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\}$ $= 3!$ (5)

ඉහත සිසුන් හතර දෙනා අතර විද්‍යා සිසුන් දෙදෙනාට මේසය වටා වාඩි විය හැකි ස්ථාන හතරක් ඇත. එම සිසුන් දෙදෙනාට වාඩි විය හැකි වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\}$ $= {}^{4}C_2 \times 2$ (5)

$\therefore$ අවශ්‍ය එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $= 3! \times {}^{4}C_2 \times 2 = 72$ (5)

(5) $\boxed{20}$

වෙනත් ක්‍රමයක්

සිසුන් 6 දෙනාටම වෘත්තාකාර මේසය වටා වාඩි විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\}$ $= 5!$ (5)

විද්‍යා සිසුන් දෙදෙනා එකළඟ සිටින පරිදි සිසුන් 6 දෙනාට මේසය වටා වාඩි විය හැකි එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $\Big\}$ $= 4! \times 2$ (5)

(5)

$\therefore$ අවශ්‍ය එකිනෙකට වෙනස් ආකාර ගණන $= 5! - 4! \times 2 = 120 - 48 = 72$ (5) $\boxed{20}$

(b) $\dfrac{3(6r+1)}{(3r-1)^2(3r+2)^2} = \dfrac{A}{(3r-1)^2} + \dfrac{B}{(3r+2)^2}$; $r \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow \quad 3(6r+1) = (A+B)\,9r^2 + (12A-6B)r + (4A+B)$; $r \in \mathbb{Z}^+$ 5

r^2 සංගුණක සමාන කිරීමෙන් : $A + B = 0$

r සංගුණක සමාන කිරීමෙන් : $12A - 6B = 18$ 10

r^0 සංගුණක සමාන කිරීමෙන් : $4A + B = 3$

$\therefore \quad A = 1$ 5 හා $B = -1$ 5

25

$f(r) = \dfrac{1}{(3r-1)^2}$ යැයි ගනිමු. එවිට $f(r+1) = \dfrac{1}{(3r+2)^2}$

$\therefore \quad U_r = f(r) - f(r+1)$

$r = 1$ විට $U_1 = f(1) - \cancel{f(2)}$

5

$r = 2$ විට $U_2 = \cancel{f(2)} - \cancel{f(3)}$

$r = n-1$ විට $U_{n-1} = \cancel{f(n-1)} - \cancel{f(n)}$

5

$r = n$ විට $U_n = \cancel{f(n)} - f(n+1)$

$$\sum_{r=1}^{n} U_r = f(1) - f(n+1)$$ 5

$$S_n = \frac{1}{4} - \frac{1}{(3n+2)^2}$$ 5

20

ඔව් ! 5

05

$\lim\limits_{n \to \infty} S_n = \dfrac{1}{4}$ 5 මක් නිසාද $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{1}{(3n+2)^2} = 0$ 5

$\therefore$ අපරිමිත ශ්‍රේණිය අභිසාරී වේ.

10

Maths අපි .com

$$\left| S_n - \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{(3n+2)^2} < 10^{-6} \quad 5$$

$\Leftrightarrow \quad (3n+2)^2 > 10^6$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow \quad 3n+2 > 10^3$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow \quad 3n > 998$ හා $n \in \mathbb{Z}^+$

$\Leftrightarrow \quad n > 332\frac{2}{3}$ හා $n \in \mathbb{Z}^+ \quad 5$

$\therefore$ n හි කුඩාම නිඛිලමය අගය $= 333$ 5

$\boxed{15}$

Maths අපි .com

13 වන ප්‍රශ්නය

13. (*a*) $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු.

$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{I}$ වන පරිදි වූ $\lambda \in \mathbb{R}$ හි අගය සොයන්න; මෙහි $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}$ යනු $\mathbf{Q}$ න්‍යාසයෙහි පෙරළුම වන අතර $\mathbf{I}$ යනු 2×2 ඒකක න්‍යාසය වේ.

ඒ නයින්, $\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ න්‍යාසයෙහි ප්‍රතිලෝමය සොයන්න.

$\mathbf{A}$ යනු $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$ වන පරිදි වූ 2×2 න්‍යාසයක් යැයි ගනිමු. මෙහි $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ වේ.

$\mathbf{A}$ සොයන්න.

(*b*) $z = x + iy$ යනු සංකීර්ණ සංඛ්‍යාවක් යැයි ගනිමු. මෙහි $x, y \in \mathbb{R}$ වේ. z හි මාපාංකය $|z|$ හා z හි සංකීර්ණ ප්‍රතිබද්ධය $\bar{z}$ අර්ථ දක්වන්න.

$|z|^2 = z\bar{z}$ හා $z - \bar{z} = 2i\,\mathrm{Im}z$ බව පෙන්වන්න.

ඒ නයින්, $|z - 3i|^2 = |z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 9$ හා $|1 + 3iz|^2 = 9|z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 1$ බව පෙන්වන්න.

$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ වන්නේ $|z| < 1$ ම නම් පමණක් බව අපෝහනය කරන්න.

$|z - 3i| > |1 + 3iz|$ හා $\mathrm{Arg}\, z = \frac{\pi}{4}$ අවශ්‍යතා සපුරාලන පරිදි වූ z සංකීර්ණ සංඛ්‍යා නිරූපණය කරන ලක්ෂ්‍ය ආගන්ඩ් සටහනක අඳින්න.

(*a*) $\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ 5

මෙවිට $\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I}$

$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} = \lambda\mathbf{I}$, මෙහි $\lambda = 2$ වේ. 5 $\boxed{10}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2\mathbf{I} \Rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

10

$$\therefore \mathbf{P}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$ 5

$\boxed{15}$

$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ යැයි ගනිමු. 5

$$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad 5$$

$$5 \quad \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \frac{a+b}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-a+b}{\sqrt{2}} = \frac{-8}{\sqrt{2}} \\ \frac{c+d}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} \\ \frac{-c+d}{\sqrt{2}} = \frac{8}{\sqrt{2}} \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} a+b = 2 \\ -a+b = -8 \\ c+d = 2 \\ -c+d = 8 \end{array}} \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = 5 \\ b = -3 \\ c = -3 \\ d = 5 \end{array} \quad 10$$

$\therefore \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ 5 **30**

වෙනත් ක්‍රමයක්

$\mathbf{AP} = \mathbf{PD} \Rightarrow \mathbf{A} = \mathbf{PDP}^{-1}$ 10

$$\therefore \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \quad 10$$

$= \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$ 10 **30**

(b) $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ 5 හා $\bar{z} = x - iy$ 5 **10**

$|z|^2 = x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy) = z\,\bar{z}$ 5

5

$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy = 2i\,\mathrm{Im}\,z$ 5

5 **20**

$$|z-3i|^2 = (z-3i)\overline{(z-3i)} \quad 5$$
$$= (z-3i)(\bar{z}+3i) \quad 5$$
$$= z\bar{z} + 3i(z-\bar{z}) + 9 \quad 5$$
$$= |z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 9 \quad 5$$

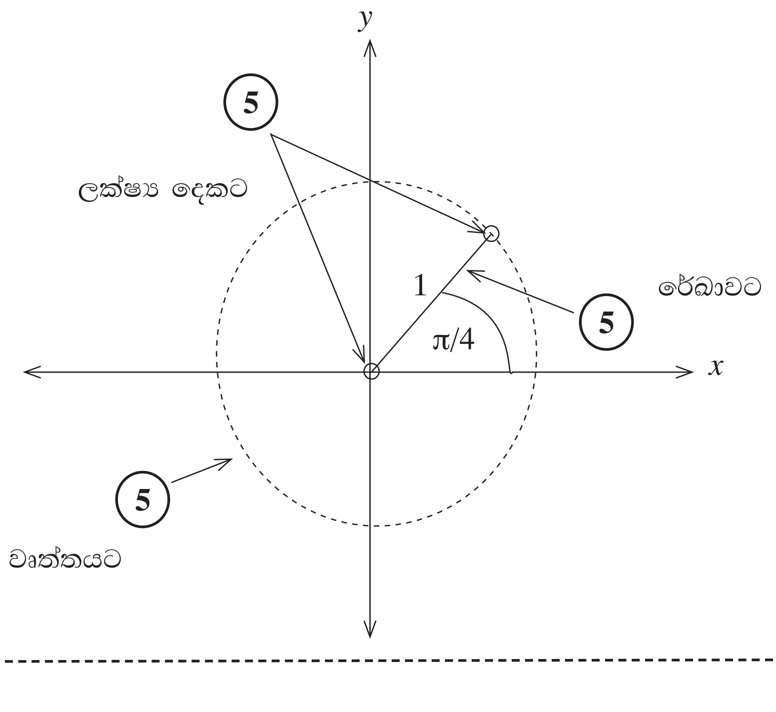
$$|1+3iz|^2 = (1+3iz)\overline{(1+3iz)}$$
$$= (1+3iz)(1-3i\bar{z})$$
$$= 1 + 3i(z-\bar{z}) + 9z\bar{z}$$
$$= 9|z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 1 \quad 10$$

$\boxed{30}$

$$|z-3i| > |1+3iz|$$
$$\Leftrightarrow |z-3i|^2 > |1+3iz|^2 \quad 5$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 9 > 9|z|^2 - 6\mathrm{Im}z + 1 \quad 5$$
$$\Leftrightarrow 8(|z|^2 - 1) < 0$$
$$\Leftrightarrow |z|^2 < 1 \quad 5$$
$$\Leftrightarrow |z| < 1 \quad 5$$

$\boxed{20}$

$$|z-3i| > |1+3iz| \Leftrightarrow |z| < 1$$



$\boxed{15}$

---

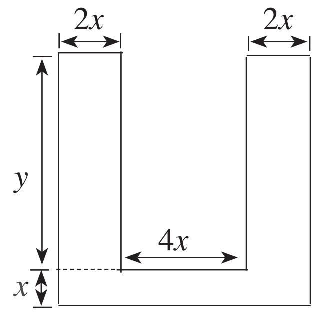
14 වන ප්‍රශ්නය

14. (*a*) $x \neq 1$ සඳහා $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$ යැයි ගනිමු.

$x \neq 1$ සඳහා $f'(x) = -\dfrac{x(x^3+2)}{(x^3-1)^2}$ බව පෙන්වා, $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයට $(0, 0)$ හා $\left(-2^{1/3}, -\dfrac{4^{1/3}}{3}\right)$ හිදී හැරුම් ලක්ෂ්‍ය පවතින බව **අපෝහනය** කරන්න.

හැරුම් ලක්ෂ්‍ය හා ස්පර්ශෝන්මුඛ දක්වමින්, $y = f(x)$ ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*b*) මායිම සෘජුකෝණික ලෙස හමුවන සරල රේඛා ඛණ්ඩ අටකින් සමන්විත ගෙවත්තක් රූපසටහනෙහි දැක්වේ. ගෙවත්තේ මාන මීටරවලින් එහි දක්වා ඇත. ගෙවත්තේ වර්ගඵලය 800 m^2 බව දී ඇත. x ඇසුරෙන් y ප්‍රකාශ කර, මීටරවලින් මනින ලද ගෙවත්තේ පරිමිතිය P යන්න $P = \dfrac{800}{x} + 10x$ මගින් දෙන ලබන බව ද, පරිමිතිය සඳහා වන මෙම සූත්‍රය වලංගු වන්නේ $0 < x < 10$ සඳහා පමණක් බව ද පෙන්වන්න.



ඒ නයින්, ගෙවත්තේ පරිමිතියෙහි අවම අගය සොයන්න.

Maths අපි.com

(*a*) $f(x) = \dfrac{x^2}{x^3 - 1}$; $x \neq 1$

$$f'(x) = \frac{(x^3-1)\,2x - x^2 \cdot 3x^2}{(x^3-1)^2} \quad (10)$$

$$= \frac{-x^4 - 2x}{(x^3-1)^2} = \frac{-x(x^3+2)}{(x^3-1)^2} \quad (5)$$

$\boxed{15}$

---

(5)

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x^3 = -2$

$\Leftrightarrow x = 0$ හෝ $x = (-2)^{\frac{1}{3}}$ (5)

x	$x < -2^{\frac{1}{3}}$	$-2^{\frac{1}{3}} < x < 0$	$0 < x < 1$	$x > 1$
$f'(x)$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$	$(-)$	$(-)$
	$f(x)$ අඩුවේ.	$f(x)$ වැඩිවේ.	$f(x)$ අඩුවේ.	$f(x)$ අඩුවේ.

(15)

$x = 0$ දී $f(0) = 0$

$x = (-2)^{\frac{1}{3}}$ දී $f(-2^{\frac{1}{3}}) = \dfrac{\left(-2^{\frac{1}{3}}\right)^2}{-2-1} = \dfrac{-4^{\frac{1}{3}}}{3}$

$\therefore$ හැරුම් ලක්ෂ්‍යය $= (0, 0)$ හා $\left(-2, -\frac{4^{\frac{1}{3}}}{3}\right)$ වේ.

5 5 **35**

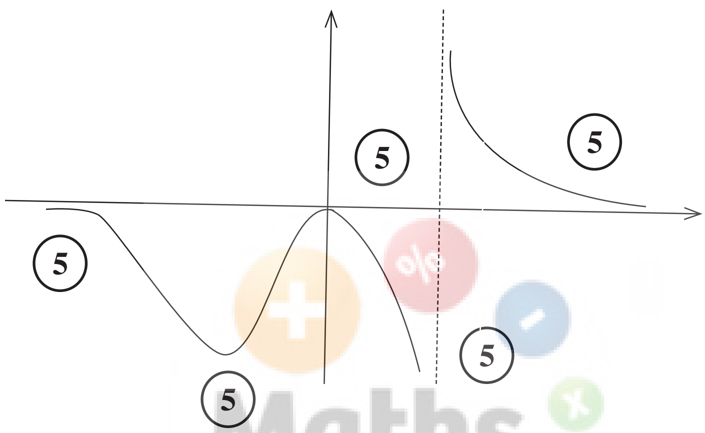
$x \longrightarrow +\infty$ විට $f(x) \longrightarrow 0$

$x \longrightarrow -\infty$ විට $f(x) \longrightarrow 0$

$x = 1$ දී $f(x)$ අර්ථ නොදැක්වේ.

$x \longrightarrow 1^{-}$ විට $f(x) \longrightarrow -\infty$

$x \longrightarrow 1^{+}$ විට $f(x) \longrightarrow +\infty$



25

Maths අපි .com

(b) රූපයේ අයුරු ගෙවත්තේ පරිමිතිය ; $P = 18x + 4y \longrightarrow (1)$ 5

ගෙවත්තේ වර්ගඵලය ; $800 = 4xy + 8x^2 \longrightarrow (2)$ 5

(2) න්, $y = \frac{200}{x} - 2x$ 5

$\therefore P = 18x + 4\left(\frac{200}{x} - 2x\right)$

$= 10x + \frac{800}{x}$ 5

20

$y = \frac{2(100 - x^2)}{x}$ 5

5 5

$y > 0$ සහ $x > 0$ බැවින්, $100 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 100 \Rightarrow x < 10$; ($x > 0$ නිසා)

$\therefore 0 < x < 10$

15

$$\frac{dP}{dx} = 10 - \frac{800}{x^2} \quad 10$$

$$5 \quad \frac{dP}{dx} = 0 \Leftrightarrow 10 - \frac{800}{x^2} = 0 \quad 5$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 80$$

$$\Leftrightarrow x = 4\sqrt{5} \quad 5 \qquad ; \; 0 < x < 10$$

25

x	$0 < x < 4\sqrt{5}$	$4\sqrt{5} < x < 10$
$\frac{dP}{dx} = 10 - \frac{800}{x^2}$ හි ලකුණ	$(-)$	$(+)$
	P අඩු වේ.	P වැඩි වේ.

10

Maths අපි.com

$\therefore \; x = 4\sqrt{5}$ විට අවම අගයක් ගනී.

$\therefore$ අවම පරිමිතිය $= 10 \times 4\sqrt{5} + \frac{800}{4\sqrt{5}}$

$= 40\sqrt{5} + 40\sqrt{5}$

$= 80\sqrt{5}$ m 5

15

---

15 වන ප්‍රශ්නය

15. (*a*) කොටස් වශයෙන් අනුකලනය භාවිතයෙන් $\int x^2 \sin^{-1} x \, \mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*b*) භින්න භාග භාවිතයෙන් $\int \frac{x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x + 1)^2} \, \mathrm{d}x$ සොයන්න.

(*c*) $a^2 + b^2 > 1$ වන පරිදි $a, b \in \mathbb{R}$ යැයි ද,

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a + \cos x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x} \, \mathrm{d}x \quad \text{හා} \quad J = \int_0^{\pi/2} \frac{b + \sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x} \, \mathrm{d}x$$

යැයි ද ගනිමු.

$aI + bJ = \frac{\pi}{2}$ බව පෙන්වන්න.

$bI - aJ$ සැලකීමෙන් I හා J හි අගයන් සොයන්න.

(*a*) $\int x^2 \sin^{-1} x \, \mathrm{d}x = \int \sin^{-1} x \, \mathrm{d}\left(\frac{x^3}{3}\right) \mathrm{d}x$ 5

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x - \frac{1}{3} \int x^3 \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$$ 5 10

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x + \frac{1}{3} \int x^2 \, \mathrm{d}\left(\sqrt{1 - x^2}\right)$$ 10

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x + \frac{1}{3} \left[x^2\sqrt{1 - x^2} - \int \sqrt{1 - x^2} \; 2x \, \mathrm{d}x\right]$$ 5 5

$$= \frac{x^3}{3} \sin^{-1} x + \frac{1}{3} \; x^2\sqrt{1 - x^2} + \frac{2}{9}(1 - x^2)^{3/2} + C$$ 5 5

C යනු අභිමත නියතයකි. $\boxed{50}$

(*b*) $\frac{x^2+3x+4}{(x^2-1)(x+1)^2} = \frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+1)^3}$ 5

$$\frac{x^2+3x+4}{(x-1)(x+1)^3} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)} + \frac{C}{(x+1)^2} + \frac{D}{(x+1)^3}$$ 10

$$x^2 + 3x + 4 = A(x + 1)^3 + B(x + 1)^2(x - 1) + C(x - 1)(x + 1) + D(x - 1)$$

$x = 1;\quad 1 + 3 + 4 = 8A \quad \Rightarrow \quad A = 1$

$x = -1;\quad 1 - 3 + 4 = -2D \quad \Rightarrow \quad D = -1$

x^3 හි සංගුණක සැසඳීමෙන් ; $0 = A + B \Rightarrow B = -A = -1$

x^2 හි සංගුණක සැසඳීමෙන් ; $1 = 3A - B + 2B + C \Rightarrow C = -1$ 10

$$\therefore \frac{x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x+1)^2} = \frac{1}{(x-1)} - \frac{1}{(x+1)} - \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x+1)^3}$$

$$\int \frac{x^2 + 3x + 4}{(x^2 - 1)(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{(x-1)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x \quad 5$$

$$= \ln|x-1| - \ln|x+1| + \frac{1}{(x+1)} + \frac{1}{2(x+1)^2} + C \quad 20$$

C යනු අභිමත නියතයකි. **50**

(c) $$aI + bJ = \int_0^{\pi/2} \frac{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi/2} \mathrm{d}x = x\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} \longrightarrow (1)$$

5 5 5

$$bI - aJ = \int_0^{\pi/2} \frac{ba + b\cos x - ab - a\sin x}{a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x}\,\mathrm{d}x \longrightarrow (2) \quad 5$$

$$= \ln(a^2 + b^2 + a\cos x + b\sin x)\Big|_0^{\pi/2}, \quad 10 \qquad a^2 + b^2 > 1 \text{ නිසා,}$$

$$= \ln(a^2 + b^2 + b) - \ln(a^2 + b^2 + a) \quad 10$$

$$= \ln\left(\frac{a^2 + b^2 + b}{a^2 + b^2 + a}\right)$$

$$(1) \times a + (2) \times b \Rightarrow I = \frac{1}{a^2 + b^2}\left\{a\frac{\pi}{2} + b\ln\left(\frac{a^2 + b^2 + b}{a^2 + b^2 + a}\right)\right\} \quad 5$$

$$(1) \times b + (2) \times a \Rightarrow J = \frac{1}{a^2 + b^2}\left\{b\frac{\pi}{2} - a\ln\left(\frac{a^2 + b^2 + b}{a^2 + b^2 + a}\right)\right\} \quad 5$$

50

---

16 වන ප්‍රශ්නය

16. (*a*) $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ සමීකරණය මගින් දෙනු ලබන S වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ බණ්ඩාංක හා අරය සොයා, xy තලය මත S වෘත්තයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

P යනු S වෘත්තය මත O මූලයෙහි සිට ඈතින් ම පිහිටි ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. P ලක්ෂ්‍යයේ බණ්ඩාංක ලියා දක්වා S වෘත්තයට P ලක්ෂ්‍යයෙහිදී වූ ස්පර්ශක රේඛාව වන l හි සමීකරණය $x + y = 2 + \sqrt{2}$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.

l රේඛාව ස්පර්ශ කරන S' වෘත්තයක්, S වෘත්තය P ගෙන් ප්‍රභින්න ලක්ෂ්‍යයකදී බාහිර ව ස්පර්ශ කරයි. (h, k) යනු S' වෘත්තයෙහි කේන්ද්‍රයේ බණ්ඩාංක යැයි ගනිමු. l රේඛාව අනුබද්ධයෙන් O හි හා S' හි කේන්ද්‍රයේ පිහිටීම සලකා බැලීමෙන්, $h + k < 2 + \sqrt{2}$ බව පෙන්වන්න.

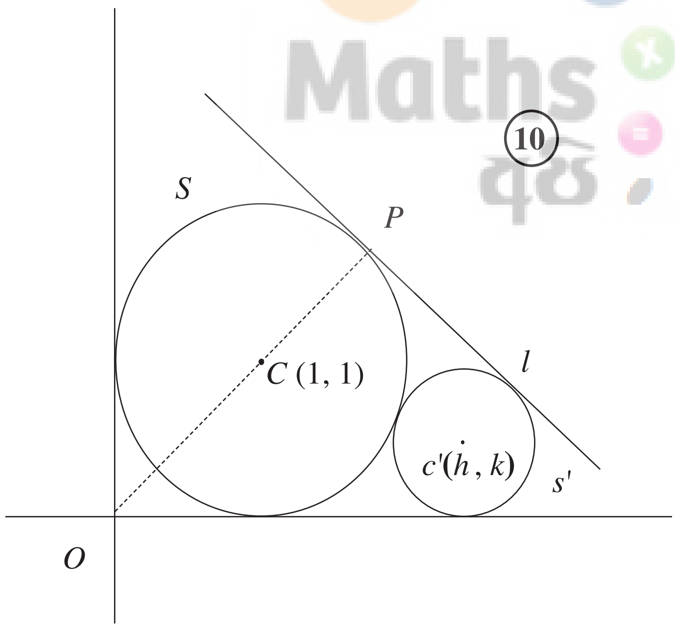
S' හි කේන්ද්‍රයේ බණ්ඩාංක $h^2 - 2hk + k^2 + 4\sqrt{2}(h + k) = 8(\sqrt{2} + 1)$ සමීකරණය සපුරාලන බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

5

$S \equiv x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$ වෘත්තයේ සමීකරණය $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$ ලෙස ලිවිය හැකිය.

$\therefore$ කේන්ද්‍රය $= (1, 1)$ 5 අරය $= 1$ 5 **15**

Maths අපි .com



10

---

5 5 5

$OP = OC + CP = \sqrt{2} + 1$ සහ $P \equiv (OP \cos\frac{\pi}{4}, OP \sin\frac{\pi}{4})$ වන නිසා

$P = (1 + \frac{1}{\sqrt{2}},\ 1 + \frac{1}{\sqrt{2}})$ වේ. 5 **20**

CP රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $= 1$, 5 $OP \perp l$ නිසා l රේඛාවේ අනුක්‍රමණය $= -1$ 5

$\therefore$ l රේඛාවේ සමීකරණය $\left[y - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] = -1\left[x - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right]$ 10

$\Rightarrow x + y = 2 + \sqrt{2}$ 5

25

$(0, 0)$ හා (h, k) ලක්ෂ්‍ය දෙක $l : x + y - (2 + \sqrt{2}) = 0$ රේඛාවේ එකම පැත්තේ පිහිටයි. 5

$\therefore$ $-(2 + \sqrt{2})\left[h + k - (2 + \sqrt{2})\right] > 0$ 5

$\Rightarrow h + k < 2 + \sqrt{2}$ 5

15

$C' \equiv (h, k)$ සිට l රේඛාවට ලම්බ දුර d නම්,

$$d = \frac{\left|h + k - (2 + \sqrt{2})\right|}{\sqrt{2}}$$ 10

$$d = \frac{(2 + \sqrt{2}) - (h + k)}{\sqrt{2}}$$ 5 $(h + k < 2 + \sqrt{2}$ නිසා$)$

S' වෘත්තය l රේඛාව ස්පර්ශ කරන බැවින් ඉහත ලම්බ දුර S' හි අරයට සමාන විය යුතුය. 10

S හා S' වෘත්ත දෙක බාහිරව ස්පර්ශ වන බැවින්

$CC' = 1 + d$ 10

$\Rightarrow CC'^2 = (1 + d)^2$

$\Rightarrow (h - 1)^2 + (k - 1)^2 = \left[1 + \frac{(2 + \sqrt{2}) - (h + k)}{\sqrt{2}}\right]^2$ 10

$\Rightarrow 2h^2 + 2k^2 - 4h - 4k + 4 = [2 + 2\sqrt{2} - h - k]^2$

5 $= (2 + 2\sqrt{2})^2 - 2(2 + 2\sqrt{2})h - 2(2 + 2\sqrt{2})k + 2hk + h^2 + k^2$ 10

$\Rightarrow h^2 - 2hk + k^2 + 4\sqrt{2}\,(h + k) = 8(\sqrt{2} + 1)$ 5

65

---

17 වන ප්‍රශ්නය

17. **(*a*)** $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma) \equiv 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha)$ සර්වසාම්‍යය සාධනය කරන්න.

(*b*) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2}$ යැයි ගනිමු. $f(x)$ යන්න $a\sin(x+\theta)+b$ ආකාරයට ප්‍රකාශ කරන්න; මෙහි $a\,(>0)$, b හා $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.
$1 \le f(x) \le 5$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

$-\frac{\pi}{6} \le x \le \frac{11\pi}{6}$ සඳහා $y = f(x)$ හි ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

(*c*) $p > 2q > 0$ යැයි ගනිමු.
ABC ත්‍රිකෝණයක BC, CA හා AB පාදවල දිග පිළිවෙළින් $p+q$, p හා $p-q$ වේ.
$\sin A - 2\sin B + \sin C = 0$ බව පෙන්වා $\cos\frac{A-C}{2} = 2\cos\frac{A+C}{2}$ බව **අපෝහනය** කරන්න.

(*a*) $\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma - \cos(\alpha+\beta+\gamma)$

$= \cos\alpha + \cos\beta - (\cos\gamma + \cos(\alpha+\beta+\gamma))$ (5)

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (5) + (5)

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha+\beta+2\gamma}{2}\right)\right]$ (5)

$= 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)2\sin\left(\frac{\alpha+\gamma}{2}\right)\sin\left(\frac{\beta+\gamma}{2}\right)$ (5)

$= 4\cos\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha+\gamma)\sin\frac{1}{2}(\beta+\gamma)$ $\boxed{25}$

(*b*) $f(x) = 2\sin^2\frac{x}{2} + 2\sqrt{3}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} + 4\cos^2\frac{x}{2}$

$= (1-\cos x) + \sqrt{3}\sin x + 2(1+\cos x)$ (10)

$= \sqrt{3}\sin x + \cos x + 3$

$= 2\left[\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right] + 3$ (5)

$= 2\left[\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x\right] + 3$ (5)

$= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) + 3$ (5)

$a = 2,\ b = 3,\ \theta = \frac{\pi}{6}$ (10) $\boxed{35}$

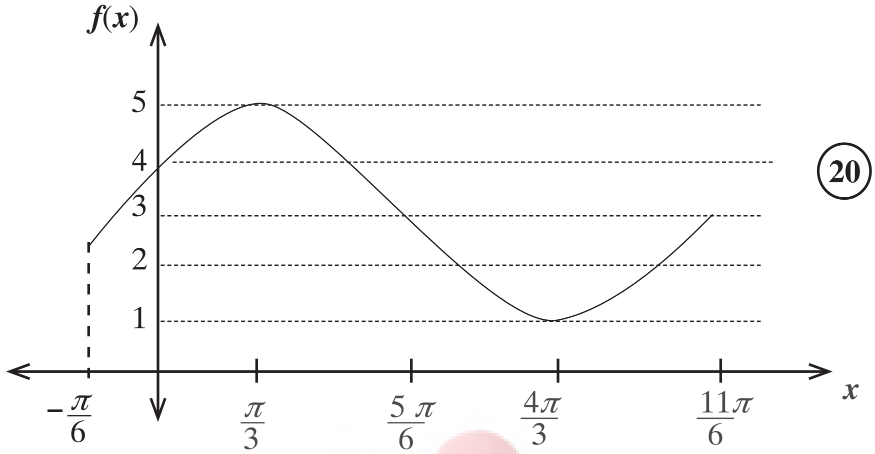
$-1 \le \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le 1$ 5

$-2 \le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \le 2$ 5

$-2+3 \le 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3 \le 2+3$

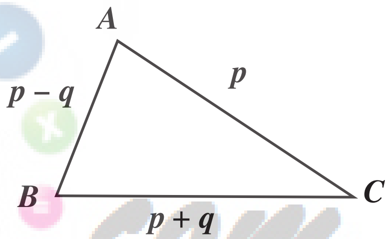
$1 \le f(x) \le 5$ 5

15



20

20



සයින් නීතිය යෙදීමෙන්,

$\frac{\sin A}{p+q} = \frac{\sin B}{p} = \frac{\sin C}{p-q} = k$ යැයි සිතමු. 5

5 5

$\Rightarrow \sin A - 2\sin B + \sin C = k(p+q) - 2kp + k(p-q) = 0$ 10

25

$\sin A + \sin C = 2\sin B$

5

$2\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = 2\sin(\pi - \overline{A+C})$ 10

$\sin\frac{A+C}{2}\cos\frac{A-C}{2} = \sin(A+C)$ 5

$\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{A+C}{2}\right)\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)$ 5

$\cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = 2\cos\left(\frac{A+C}{2}\right)$ 5

$\left(0 < \frac{A+C}{2} < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \ \sin\left(\frac{A+C}{2}\right) > 0\right)$

30

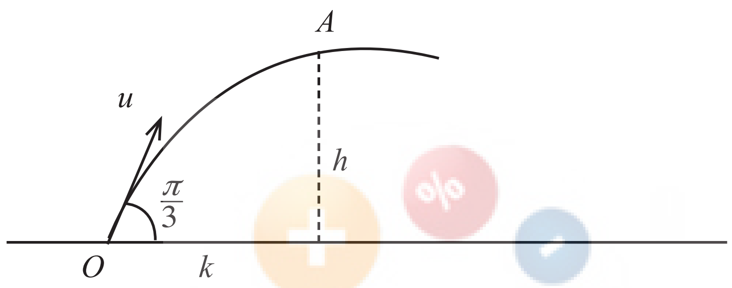
2.2.3. II ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි ප්‍රශ්න සඳහා අපේක්ෂිත පිළිතුර, ලකුණු දීමේ පටිපාටිය, පිළිතුරු සැපයීම පිළිබඳ නිරීක්ෂණ, නිගමන හා යෝජනා

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - A කොටස

1 වන ප්‍රශ්නය

1. අංශුවක් O ලක්ෂ්‍යයක සිට තිරසට $\frac{\pi}{3}$ කෝණයකින් ආනතව u වේගයකින් ගුරුත්වය යටතේ ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. අංශුව k දුරක් තිරස්ව ගමන් කළ විට O හි මට්ටමට ඉහළින් එහි සිරස් දුර h යැයි ගනිමු.

$\sqrt{3}k = h + \frac{2gk^2}{u^2}$ බව පෙන්වන්න.



O සිට A දක්වා $s = ut + \frac{1}{2}at^2$ යෙදීමෙන්,

$\rightarrow \quad k = \frac{u}{2}T$ .... (1) 5

$\uparrow \quad h = \frac{\sqrt{3}u}{2}T - \frac{1}{2}gT^2$ .... (2) 10

(1) න් හා (2) න්, $h = \sqrt{3}k - \frac{1}{2}g\left(\frac{2k}{u}\right)^2$ 5

$\Rightarrow \sqrt{3}k = h + \frac{1}{2}g\frac{4k^2}{u^2}$

$\Rightarrow \sqrt{3}k = h + \frac{2gk^2}{u^2}$ 5

25

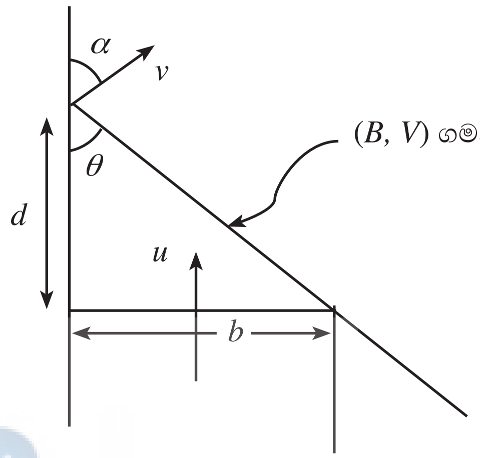
---

2 වන ප්‍රශ්නය

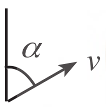
2. පළල b වූ වෑන් රථයක් ඒකාකාර u ප්‍රවේගයෙන් සෘජු පාරක් දිගේ පදික වේදිකාවට සමාන්තරව එහි ගැටී නොගැටී ගමන් කරයි. පිරිමි ළමයෙක් වෑන් රථයට d දුරක් ඉදිරියෙන් පදික වේදිකාවේ සිට පාරට බැස, වෑන් රථයේ චලිත දිශාව සමග α සුළු කෝණයක් සාදන දිශාවට $v\ (< u \sec \alpha)$ ඒකාකාර ප්‍රවේගයෙන් ඇවිද යයි. ළමයා, වෑන් රථයෙහි නොහැපී, යන්තමින් බේරෙයි නම්, $bu = (b\cos\alpha + d\sin\alpha)\, v$ බව පෙන්වන්න.

B - පිරිමි ළමයා

V - වෑන් රථය

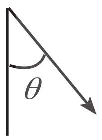


Vel (B, E) =



Vel (V, E) =

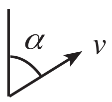
Vel (B, V) =



5

Vel (B, V) = Vel (B, E) + Vel (E, V) 5

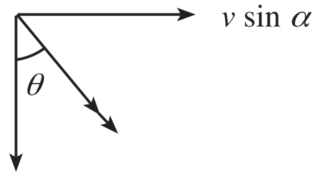
=



5

+

=



$$\tan\theta = \frac{v\sin\alpha}{u - v\cos\alpha}$$ 5

$$\Rightarrow \quad \frac{b}{d} = \frac{v\sin\alpha}{u - v\cos\alpha}$$ 5

$$\Rightarrow \quad bu = (b\cos\alpha + d\sin\alpha)\, v$$

25

Maths අපි .com

3 වන ප්‍රශ්නය

3. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසල ව ඇත. එක එකක ස්කන්ධය $2m$ වූ අංශු දෙකක් මේසය මත ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශාවලට u හා $2u$ වේගවලින්, නිසල ව තිබෙන අංශුව දෙසට චලනය වෙමින් එය සමග එකවිට ගැටී හා වේ. ගැටුම්වලට පසු සංයුක්ත අංශුවේ වේගය සොයා, ගැටුම් නිසා සිදුවන චාලක ශක්ති හානිය $\frac{23}{5}mu^2$ බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියට $\mathbf{I} = \Delta(m\,\mathbf{v})$ යෙදීමෙන්,

$\longrightarrow \quad 0 = 5mv - (2m \times 2u - 2mu)$ (10)

$\therefore \quad v = \frac{2u}{5}$ (5)

$\Delta T = \frac{1}{2}(5m)v^2 - \frac{1}{2}(2m)(2u)^2 - \frac{1}{2}(2m)u^2$ (5)

$= \frac{1}{2}(5m)\left(\frac{2u}{5}\right)^2 - 4mu^2 - mu^2$

$= \frac{2mu^2}{5} - 5mu^2 = -\frac{23}{5}mu^2$ (5)

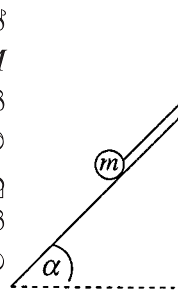
$\therefore$ චාලක ශක්ති හානිය $= \frac{23}{5}mu^2$

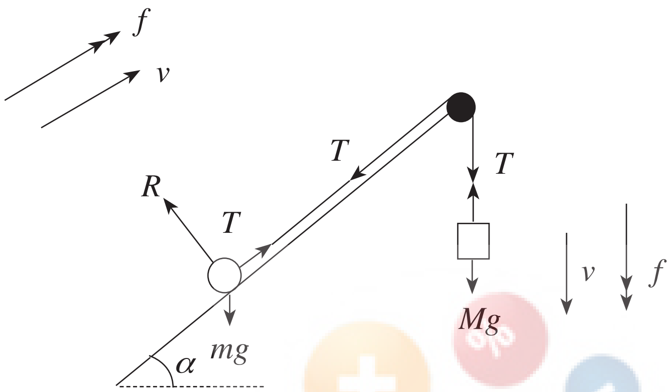
$\boxed{25}$

---

4 වන ප්‍රශ්නය

4. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක් තිරසට ආනතිය α වූ අචල සුමට තලයක් මත නිසලව ඇති අතර එය, තලයේ ඉහළ ම කෙළවරෙහි වූ කුඩා සුමට කප්පියක් මතින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින්, නිදහසේ එල්ලෙන M $(M > m \sin \alpha)$ ස්කන්ධයකට සම්බන්ධ කර ඇත. රූපයේ දක්වා ඇති පරිදි, M ස්කන්ධය කප්පිය ආසන්නයේ තබා ආනත තලයේ උපරිම බෑවුම් රේඛාවක් දිගේ තන්තුව තදව පද්ධතිය නිශ්චලතාවයේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. ස්කන්ධය m වූ අංශුව තලය දිගේ ඉහළට d දූරක් චලනය වූ විට එහි වේගය v යන්න $(M + m)\, v^2 = 2\, gd\, (M - m \sin\alpha)$ මගින් දෙනු ලබන බව පෙන්වන්න.





5

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්,

m ↗ $T - mg \sin \alpha = mf$ 5

M ↓ $Mg - T = Mf$ 5

$$\therefore\ f = \frac{(M - m\sin\alpha)g}{(M + m)}$$ 5

m ↗ $v^2 = u^2 + 2as$ යෙදීමෙන්, $v^2 = 2(f)(d) = 2\ \dfrac{(M - m\sin\alpha)}{(M + m)}\, gd$

$\Rightarrow\ (M + m)v^2 = 2gd\,(M - m\sin\alpha)$ 5

25

විකල්ප විසඳුම

ඉහත රූප සටහනට 5

ශක්ති සංස්ථිති නියමයෙන්, $\frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = Mgd - mgd\sin\alpha$ 15

$= (M - m\sin\alpha)gd$

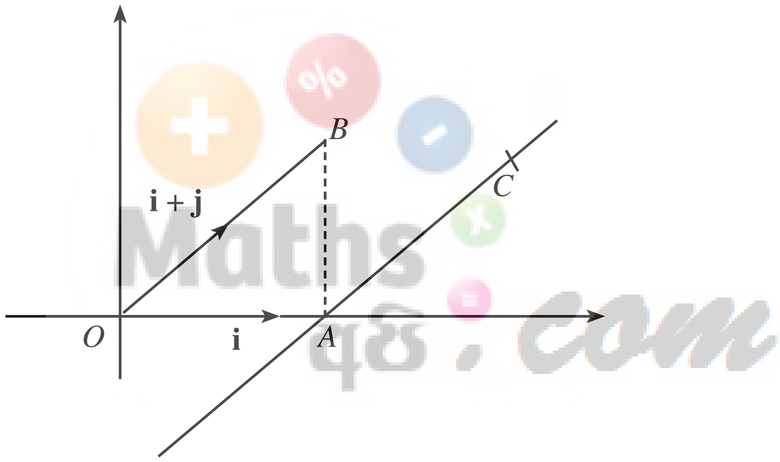
$\Rightarrow\ (M + m)v^2 = 2gd\,(M - m\sin\alpha)$ 5

25

Maths අපි.com

5 වන ප්‍රශ්නය

5. සුපුරුදු අංකනයෙන්, O අචල මූලයකට අනුබද්ධයෙන් A හා B ලක්ෂ්‍ය දෙකක පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙලින් $\mathbf{i}$ හා $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ යැයි ගනිමු. C යනු A හරහා OB ට සමාන්තර සරල රේඛාව මත වූ ලක්ෂ්‍යයක් යැයි ද ගනිමු. $\overrightarrow{OC} = (1+\lambda)\,\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j}$ බව පෙන්වන්න; මෙහි λ යනු තාත්ත්වික සංඛ්‍යාවක් වේ. OB ට BC ලම්බ වන පරිදි වූ λ හි අගය සොයන්න.



$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$ සහ $\overrightarrow{AC} = \lambda\,(\mathbf{i}+\mathbf{j})$, මෙහි $\lambda \in \mathbb{R}$ 5

$\therefore\ \overrightarrow{OC} = \mathbf{i} + \lambda\,(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

$\quad = (1+\lambda)\,\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j}$ 5

$BC \perp OB \Rightarrow \overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{OB} = 0$ .... (1) 5

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$

$\quad = -\mathbf{i} - \mathbf{j} + (1+\lambda)\,\mathbf{i} + \lambda\mathbf{j}$

$\quad = \lambda\mathbf{i} + (\lambda-1)\mathbf{j}$ 5

(1) න්

$$\left[\lambda\mathbf{i} + (\lambda-1)\mathbf{j}\right].\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}) = 0$$

$$\Rightarrow\ \lambda + (\lambda - 1) = 0$$

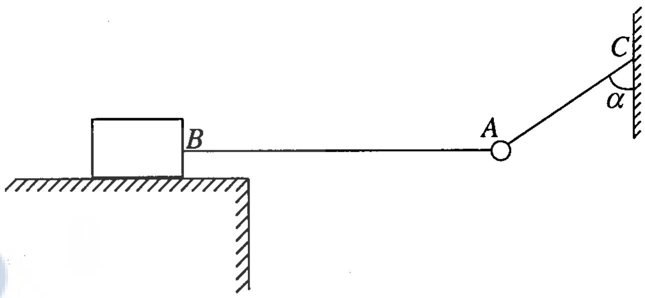
$$\Rightarrow\ \lambda = \frac{1}{2}$$ 5

25

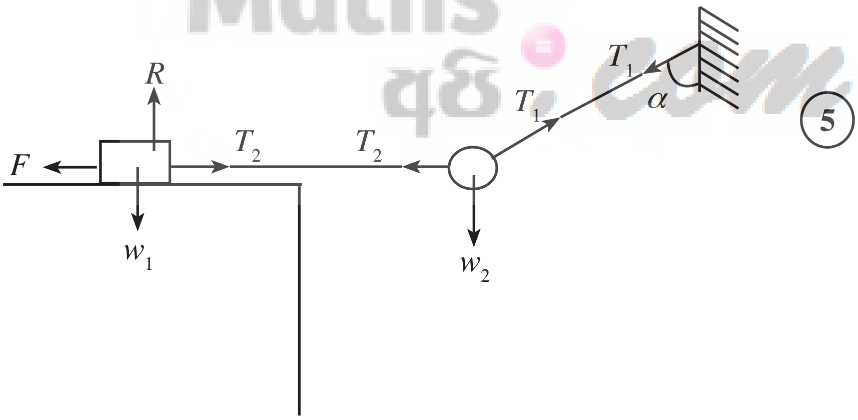
---

6 වන ප්‍රශ්නය

6. රළු තිරස් මේසයක් මත නිසල ව ඇති බර w_1 වූ ලී කුට්ටියක්, සැහැල්ලු අවිතන්‍ය BC තන්තුවකින් සිරස් බිත්තියක් මත පිහිටි කුඩා අචල ඇණයකට රූපයෙහි දක්වා ඇති පරිදි සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුවේ A ලක්ෂ්‍යයකදී බර w_2 වූ අංශුවක් ගැටගසා ඇත්තේ CA යටි අත් සිරස සමඟ α කෝණයක් සාදන පරිදි ය. AB කොටස තිරස් නම් සහ කුට්ටිය සීමාකාරී සමතුලිතතාවයේ ඇත්නම්, $\mu w_1 = w_2 \tan\alpha$ බව පෙන්වන්න. මෙහි μ යනු කුට්ටිය හා මේසය අතර ඝර්ෂණ සංගුණකය වේ.



Maths අපි.com



w_1 $\uparrow$ $R = w_1$ (5)

$F = \mu R = \mu w_1$ (5)

පද්ධතියට $\longrightarrow$ $T_1 \sin\alpha = F$

w_2 $\uparrow$ $T_1 \cos\alpha = w_2$ (5)

$\Rightarrow \tan\alpha = \dfrac{F}{w_2}$

$\Rightarrow w_2 \tan\alpha = \mu w_1$ (5)

25

7 වන ප්‍රශ්නය

7. A, B හා C යනු Ω නියැදි අවකාශයක අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර හා නිරවශේෂ සිද්ධි තුනක් යැයි ගනිමු. $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, $P(B \cup C) = \frac{1}{2}$ හා $P(C \cup A) = \frac{2}{3}$ යන සම්භාවිතා එකවිට තිබිය හැකි ද? ඔබේ පිළිතුර සනාථ කරන්න.

නොහැකි ය. 5

A හා B අන්‍යොන්‍ය වශයෙන් බහිෂ්කාර නිසා,

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

$\Rightarrow P(A) + P(B) = \frac{1}{2}$ .... (1)

එලෙසම, $P(B) + P(C) = \frac{1}{2}$ .... (2)

හා $P(C) + P(A) = \frac{2}{3}$ .... (3)

5

(1) + (2) + (3) $\Rightarrow$

$2[P(A) + P(B) + P(C)] = \frac{5}{3}$

$\therefore P(A) + P(B) + P(C) = \frac{5}{6}$ .... (4) 5

A, B හා C නිරවශේෂ සිද්ධි බැවින්,

$A \cup B \cup C = \Omega$

$\therefore P(A) + P(B) + P(C) = P(\Omega) = 1$ .... (5) 5

(4) හා (5) සමාන නොවන බැවින් ඉහත සම්භාවිතා සපුරාලන පරිදි

A, B හා C සිද්ධි පැවතිය නොහැකිය. 5

25

Maths අපි.com

8 වන ප්‍රශ්නය

8. A හා B යනු Ω නියැදි අවකාශයක සිද්ධි දෙකක් යැයි ගනිමු. $P(A\backslash B) = P(A\backslash B')$ නම් A හා B ස්වායත්ත බව පෙන්වන්න; මෙහි B' මගින් B හි අනුපූරක සිද්ධිය දැක්වේ.

$P(A\backslash B) = P(A\backslash B')$ නම්,

$$\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A\cap B')}{P(B')} \qquad [P(B) \neq 0,\ P(B') \neq 0] \qquad 5$$

$$= \frac{P(A) - P(A\cap B)}{1 - P(B)} \qquad [P(B) \neq 0, 1 \text{ එනම් } 0 < P(B) < 1] \qquad 5$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) - P(B)\, P(A\cap B) = P(A)\, P(B) - P(B)\, P(A\cap B) \qquad 5$$

$$\Rightarrow P(A\cap B) = P(A)\, P(B) \qquad 5$$

$\therefore$ A හා B ස්වායත්ත වේ. 5

25

Maths අපි .com

9 වන ප්‍රශ්නය

9. පහත දැක්වෙන නිරීක්ෂණ අටෙහි මධ්‍යන්‍යය හා මාතය පිළිවෙළින් 4 හා 6 වේ.

$$2, \ 3, \ 6, \ 2, 1, \ x, \ y, \ z$$

මෙහි x, y හා z තාත්ත්වික සංඛ්‍යා වේ. x, y හා z හි අගයන් සොයා, නිරීක්ෂණ අටෙහි සම්මත අපගමනය ගණනය කරන්න.

මධ්‍යන්‍යය 4 බැවින්,

$2+3+6+2+1+x+y+z = 4 \times 8$

$\therefore \ x+y+z = 32-14 = 18$ .... (1) — 5

මාතය 6 බැවින් අඥාත 3න් 2ක් වත් 6 විය යුතුය. — 5

(1) ට අනුව අනෙක් අඥාතය ද 6 විය යුතුය. — 5

$\therefore \ x = y = z = 6$

සම්මත අපගමනය $= \sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\dfrac{4+1+4+4+9+3\times 4}{8}}$ — 5

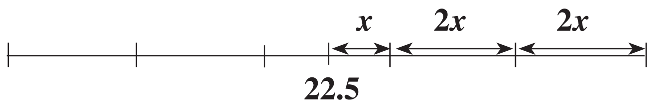
$= \sqrt{\dfrac{34}{8}} = \dfrac{\sqrt{17}}{2}$ — 5 — **25**

Maths අපි.com

10 වන ප්‍රශ්නය

10. සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක පන්ති ප්‍රාන්තර පහක් ඇත. තෙවන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය 22.5 වේ. පස්වන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ උඩත් පන්ති මායිම 40 වේ. පළමුවන පන්ති ප්‍රාන්තරයේ සිට අනුපිළිවෙළින් පන්ති ප්‍රාන්තරවල සංඛ්‍යාත 7, 19, 27, 15 හා 2 වේ. ව්‍යාප්තියේ මාතය ගණනය කරන්න.

පන්ති ප්‍රාන්තරයක තරම (පළල) $= 2x$ යයි ගනිමු.



$\therefore\ 5x = 40 - 22.5$ 5

$x = 3.5$ 5

මාතය ඇතුළත් වන්නේ 3 වන පන්ති ප්‍රාන්තරය වන 19 - 26 ට ය. 5

$\therefore$ මාතය $= 19 + \left(\dfrac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2}\right) C,$ මෙහි $\Delta_1 = 27 - 19 = 8,\ \Delta_2 = 27 - 15 = 12,\ C = 7$ 5

$= 19 + \dfrac{8}{20} \times 7$

$= 21.8$ 5 **25**

Maths අපි.com

(10) සංයුක්ත ගණිතය II - B කොටස

11 වන ප්‍රශ්නය

11.(*a*) අංශුවක්, අචල දෘඪ තිරස් ගෙබිමක වූ ලක්ෂ්‍යයකින් සිරස්ව උඩු අතට u ප්‍රවේගයකින් ප්‍රක්ෂේප කරනු ලැබේ. ගුරුත්වය යටතේ චලනය වීමෙන් පසු එය ගෙබිම හා ගැටෙයි. අංශුව හා ගෙබිම අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය e $(0 < e < 1)$ වේ.

(i) තුන්වෙනි ගැටුම දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා ප්‍රවේග කාල ප්‍රස්තාරයෙහි දළ සටහනක් අඳින්න.

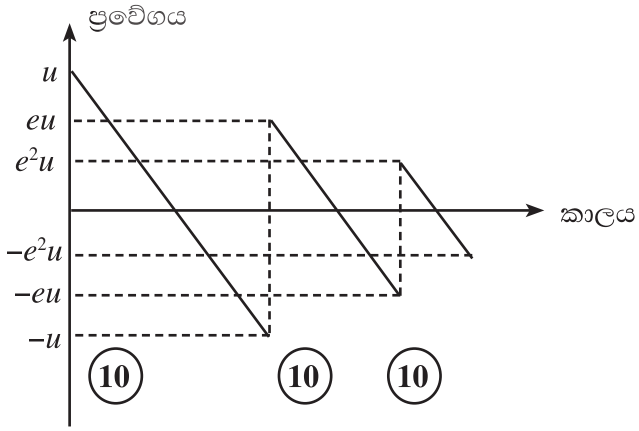
(ii) තුන්වෙනි ගැටුම දක්වා අංශුව ගන්නා කාලය $\dfrac{2u}{g}(1 + e + e^2)$ බව පෙන්වන්න.

(iii) නිශ්චලතාවට පැමිණීමට අංශුව ගන්නා මුළු කාලය $\dfrac{2u}{g\,(1 - e)}$ බව තවදුරටත් පෙන්වන්න.

(*b*) මුළු ස්කන්ධය මෙට්‍රික් ටොන් 300ක් වූ දුම්රියක්, එන්ජිම ක්‍රියා විරහිත කර, තිරසට $\sin^{-1}\left(\dfrac{1}{98}\right)$ ආනතියක් ඇති සෘජු දුම්රිය මාර්ගයක් දිගේ පහළට නියත වේගයෙන් චලනය වේ. දුම්රියේ ඉහළට චලිතය කෙරෙහි සර්ෂණ ප්‍රතිරෝධයේ විශාලත්වය, පහළට චලිතයේදී වූ නියත අගයේම පවතියි නම්, දුම්රිය නියත 54 km h^{-1} වේගයකින් එම දුම්රිය මාර්ගයේ ම ඉහළට ඇදගෙන යාම සඳහා අවශ්‍ය ජවය 900 kW බව පෙන්වන්න.

දුම්රිය සෘජු තිරස් මාර්ගයක, කලින් තිබුණු විශාලත්වයම ඇති ප්‍රතිරෝධයක් සහිතව 18 km h^{-1} ක වේගයකින් ගමන් කරන විට එන්ජිම මෙම ජවය සහිත ව ක්‍රියා කරන බව උපකල්පනය කරමින් දුම්රියෙහි ත්වරණය සොයන්න.
[ගුරුත්වජ ත්වරණය $g = 9.8 \text{ m s}^{-2}$ ලෙස ගන්න.]

(*a*) (i)



(ii) පළමුවන ගැටුම සඳහා ගතවන කාලය T_1 යැයි ගනිමු.

$T_1/2 = u/g \Rightarrow T_1 = 2u/g$ (5)

පළමුවන ගැටුමේ සිට දෙවන ගැටුම දක්වා කාලය

$T_2 = 2eu/g$ (5)

දෙවන ගැටුමේ සිට තුන්වන ගැටුම දක්වා කාලය

$T_3 \;=\; 2e^2u/g$ 5

තුන්වන ගැටුම දක්වා ගතවන මුළු කාලය $= T_1 + T_2 + T_3 = \dfrac{2u}{g}(1 + e + e^2)$ 5

(iii) අංශුවට නිශ්චලතාවට පත්වීම සඳහා ගතවන කාලය

$= T_1 + T_2 + T_3 + \dots$ 5

$= \dfrac{2u}{g}(1 + e + e^2 + e^3 + \dots)$ 5

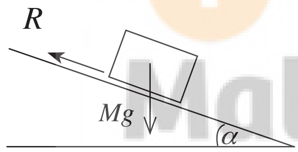
$= \dfrac{2u}{g} \displaystyle\sum_{r=0}^{\infty} e^r$ 5

$= \dfrac{2u}{g} \dfrac{1}{(1-e)}$ 5

$= \dfrac{2u}{g\,(1-e)}$

70

(*b*) දුම්රියේ ස්කන්ධය $M = 300\ 000$ kg



$\sin \alpha = \dfrac{1}{98}$ 5

දුම්රිය ආනත තලය ඔස්සේ නියත ප්‍රවේගයෙන් පහළට චලනය වේ.

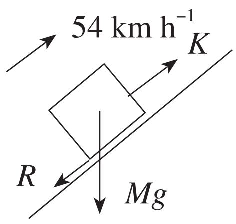
↘ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්,

$Mg \sin\alpha - R = 0$ 10

$300\ 000 \times 9.8 \times \dfrac{1}{98} - R = 0$

$R = 30\ 000$ N 5

උඩු අත් චලිතය සඳහා



$V = 54 \text{ km h}^{-1} = \dfrac{54 \times 1000}{60 \times 60}$

$V = 15 \text{ ms}^{-1}$ 5

ප්‍රකර්ෂණ බලය K යැයි ගනිමු. ↗ $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

$K - R - Mg \sin \alpha = 0$ 10

$P = FV$ යෙදීමෙන්

ජවය, $P = (R + Mg \sin \alpha)\ V$

$= (30\,000 + 30\,000) \times 15 = 900\,000$

$= 900$ kW　5

$\boxed{40}$

ප්‍රවේගය　$V = 18$ km h^{-1} $= \dfrac{18\,000}{60 \times 60}$ m s^{-1}　5

$= 5$ m s^{-1}

ප්‍රකර්ෂණ බලය　$= \dfrac{P}{V}$

$= \dfrac{900\,000}{5}$ N　10

$= 180\,000$ N　5

→ **F** $=$ ***ma***

$180\,000 - 30\,000 = 300\,000 \times a$; මෙහි a යනු ත්වරණය වේ.　10

ත්වරණය $= \dfrac{150\,000}{300\,000}$　5

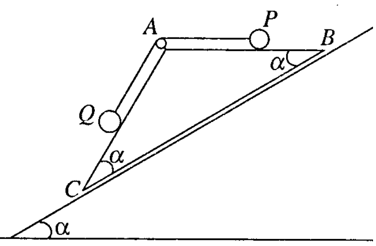
$a = \dfrac{1}{2}$ m s^{-2}　5

$\boxed{40}$

Maths අඩි.com

12 වන ප්‍රශ්නය

12.(*a*) ABC ත්‍රිකෝණය, ස්කන්ධය M වූ ඒකාකාර සුමට කුඤ්ඤයක ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය ඔස්සේ වූ සිරස්කඩකි. AC හා BC රේඛා අදාළ මුහුණත්වල වැඩිතම බෑවුම් රේඛා වන අතර BA හා AC රේඛා BC සමඟ සමාන $\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{4}\right)$ කෝණ සාදයි. තිරසට α කෝණයක ආනතියකින් යුතු අචල සුමට තලයක් මත BC අන්තර්ගත මුහුණත ඇතිව ද, AB තිරස්ව ද කුඤ්ඤය රූපයේ දැක්වෙන පරිදි තබා ඇත. ස්කන්ධ පිළිවෙළින් m_1 හා m_2 වන P හා Q අංශු දෙකක්, පිළිවෙළින් AB හා AC මත තබා, A ශීර්ෂයෙහි වූ කුඩා සුමට කප්පියක් උඩින් යන සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවකින් සම්බන්ධ කර ඇත. තන්තුව තදව, පද්ධතිය නිශ්චලතාවෙහි සිට මුදා හරිනු ලැබේ.



එක් එක් අංශුවේ කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව ත්වරණයත්, කුඤ්ඤයේ ත්වරණයත් නිර්ණය කිරීම සඳහා P අංශුවට BA දිගේ ද, Q අංශුවට AC දිගේ ද, මුළු පද්ධතියට BC දිගේ ද චලිත සමීකරණ ලියා දක්වන්න.

$m_1 = m_2$ නම්, කුඤ්ඤයට සාපේක්ෂව එක් එක් අංශුවේ ත්වරණය ශුන්‍ය වන බව ද, කුඤ්ඤයේ ත්වරණයේ විශාලත්වය $g\sin\alpha$ බව ද පෙන්වන්න.

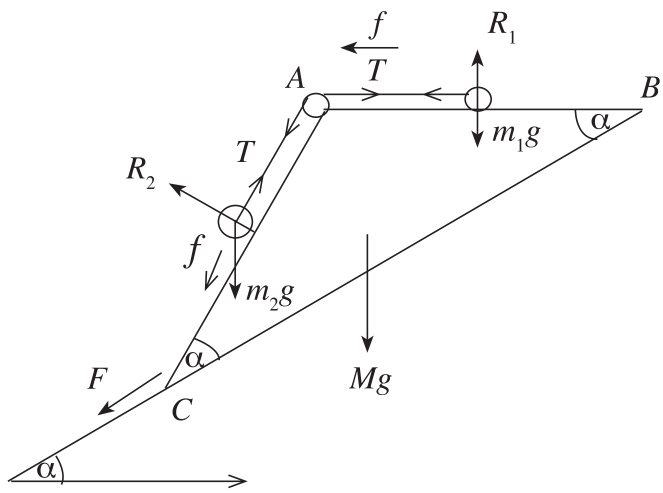
Maths අපි.com

(*b*) ස්කන්ධය m වූ P අංශුවක්, අරය a හා කේන්ද්‍රය O වූ අචල ගෝලයක සුමට බාහිර පෘෂ්ඨයේ ඉහළ ම ලක්ෂ්‍යයෙහි තබා ඇත. ස්කන්ධය $2m$ වූ වෙනත් Q අංශුවක් තිරස්ව u ප්‍රවේගයෙන් චලනය වෙමින් P සමඟ සරල ලෙස ගැටෙයි. P හා Q අතර ප්‍රත්‍යාගති සංගුණකය $\frac{1}{2}$ වේ. ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුවේ ප්‍රවේගය සොයන්න.

OP අරය θ කෝණයකින් හැරී ඇති විට තවමත් P අංශුව ගෝලය සමඟ ස්පර්ශව ඇතැයි උපකල්පනය කරමින්, P අංශුව මත ගෝලය මගින් ඇති කෙරෙන ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{m}{a}\left[\, ga(3\cos\theta - 2) - u^2 \,\right]$ බව පෙන්වන්න.

$u = \sqrt{ga}$ නම්, Q සමඟ ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුව ගෝලීය පෘෂ්ඨය හැර යන බව ද පෙන්වන්න.

(a)



බල සඳහා **10**

acc (W, E) = α F

acc (P, W) = $f \longleftarrow$

acc (Q, W) = 2α f

10

acc (P, E) = f α F

acc (Q, E) = α α F f

$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ යෙදීමෙන්,

P සඳහා $\longleftarrow$ $T = m_1(f + F\cos\alpha)$ .... (1) **10**

Q සඳහා 2α $m_2 g\sin 2\alpha - T = m_2(f + F\cos\alpha)$ .... (2) **10**

පද්ධතිය සඳහා α

$(M + m_1 + m_2)\, g\sin\alpha = MF + m_1(f\cos\alpha + F) + m_2(f\cos\alpha + F)$............. (3) **10** **50**

$$\boxed{m_1 = m_2}$$

$(1) + (2) \longrightarrow m_1 g\sin 2\alpha = m_1 2(f + F\cos\alpha)$

$f + F\cos\alpha = g\sin\alpha\cos\alpha$ .... (4) **5**

$(3) \Rightarrow (M + 2m_1)\, g\sin\alpha = MF + 2m_1(F + f\cos\alpha)$

$= (M + 2m_1)F + 2m_1 f\cos\alpha$ **5**

$g\sin\alpha = F + \dfrac{2m_1}{M + 2m_1} f\cos\alpha$ .... (5) **5**

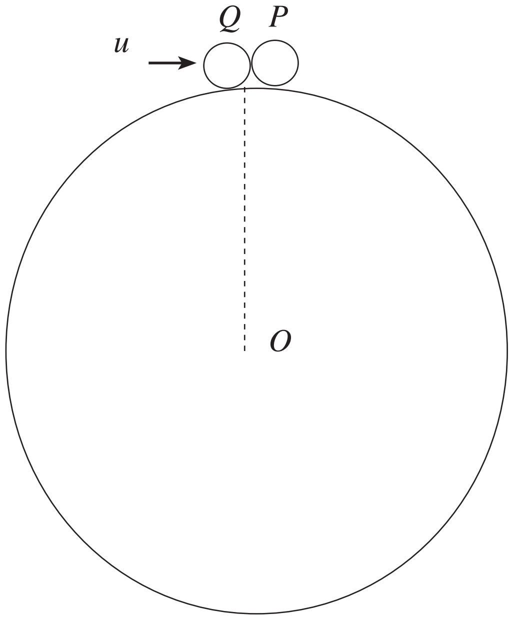
$(4) + (5)\cos\alpha \Rightarrow f = \dfrac{2m_1}{M + 2m_1} f\cos^2\alpha$ **5**

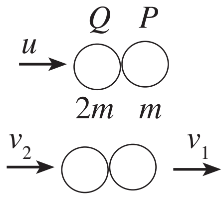
$Mf + 2m_1\sin^2\alpha f = 0 \Rightarrow f = 0$ **5**

දැන් $(5), \Rightarrow F = g\sin\alpha$ **25**

Maths අපි.com

(*b*)





$\mathbf{I} = \Delta(m\mathbf{v}) \longrightarrow$ අංශු සඳහා

$$0 = 2mv_2 + mv_1 - 2mu \qquad 10$$

$$2v_2 + v_1 = 2u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

නිව්ටන්ගේ ප්‍රත්‍යාගති නියමය :

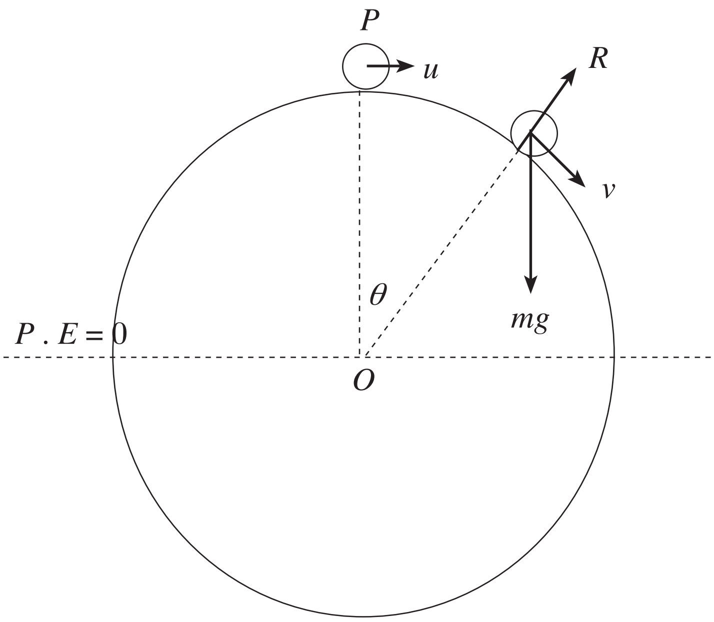
$$v_1 - v_2 = \frac{1}{2}u \qquad 10$$

$$2v_1 - 2v_2 = u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow v_1 = u \qquad 5$$

25

Maths අපි .com



5

ශක්ති සංස්ථිති නියමය යෙදීමෙන්

$$\frac{1}{2}mv^2 + mga\cos\theta = \frac{1}{2}mu^2 + mga \quad 15$$

$$V^2 = u^2 + 2ga(1 - \cos\theta)$$

F = m**a** යෙදීමෙන්,

$$R - mg\cos\theta = -\frac{mv^2}{a} \quad 10$$

$$R = mg\cos\theta - \frac{m}{a}\left[u^2 + 2ga(1-\cos\theta)\right] \quad 5$$

$$= \frac{m}{a}\left[ga\cos\theta - u^2 - 2ga(1-\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{m}{a}\left[3ga\cos\theta - 2ga - u^2\right] \quad 5$$

$$= \frac{m}{a}\left[ga(3\cos\theta - 2) - u^2\right]$$

$u = \sqrt{ga}$ සහ $\theta = 0 \Rightarrow R = 0$ 5

∴ ගැටුමෙන් මොහොතකට පසු P අංශුව පෘෂ්ඨය හැර යයි. 5

50

Maths අපි.com

13 වන ප්‍රශ්නය

13. ස්කන්ධය m වූ අංශුවක්, ස්වභාවික දිග l වූ සැහැල්ලු ප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක එක් කෙළවරකට ඇඳා ඇති අතර තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර අචල O ලක්ෂ්‍යයකට ඇඳා ඇත. අංශුව සමතුලිතව එල්ලෙන විට තන්තුවේ විතතිය $\frac{1}{3}$ වේ. තන්තුවේ ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය සොයන්න.

අංශුව, O ට $\frac{l}{2}$ දුරකින් සිරස්ව පහළින් වූ ලක්ෂ්‍යයේ තබා නිශ්චලතාවේ සිට මුදා හරිනු ලැබේ. O සිට l දුරකින් සිරස්ව පහළින් වූ A ලක්ෂ්‍යය වෙත අංශුව ප්‍රථම වතාවට ළඟා වන විට එහි ප්‍රවේගය සොයන්න.

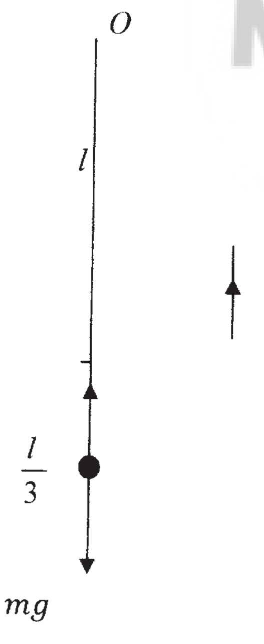
B යනු අංශුව ළඟා වන පහළ ම ලක්ෂ්‍යය යැයි ගනිමු. A සිට B දක්වා අංශුවේ චලිතය සඳහා තන්තුවේ විතතිය x යන්න $\ddot{x} + \frac{3g}{l}\left(x - \frac{1}{3}\right) = 0$ සමීකරණය සපුරාලන බව පෙන්වන්න.

ඉහත සමීකරණයේ විසඳුම $x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ ආකාරයේ බව උපකල්පනය කරමින්, α, β, ω නියතවල අගයන් සොයන්න.

ඒ නයින්, අංශුව A සිට B දක්වා යෙදෙන සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය හා විස්තාරය සොයන්න.

මුදා හළ මොහොතේ සිට $\sqrt{\frac{l}{g}}\left\{1 + \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right\}$ කාලයකට පසුව අංශුව B වෙත ළඟා වන බව පෙන්වන්න.

අංශුව B හි ඇතිවිට තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න.



ප්‍රත්‍යාස්ථතා මාපාංකය λ යැයි ගනිමු.

$$T_0 = \frac{\lambda\left(\frac{l}{3}\right)}{l}$$ 5

$$T_0 = mg$$

$$\frac{\lambda l}{3l} = mg$$

$$\lambda = 3mg$$ 5

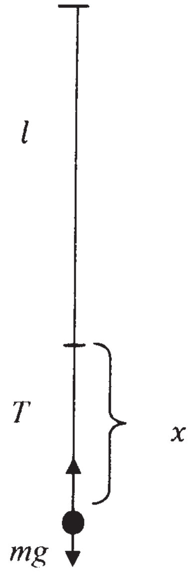
10

$$v^2 = u^2 + 2as$$

$$v^2 = 2g\left(\frac{l}{2}\right)$$

$$v = \sqrt{gl}$$ 5

05



$$T = \frac{\lambda x}{l} = \frac{3mgx}{l} \quad 5$$

$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \downarrow$

$$mg - T = m\ddot{x} \quad 10$$

$$mg - \frac{3mgx}{l} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{3g\left(x - \frac{l}{3}\right)}{l} = 0\,; \quad x \geq 0 \quad 5$$

$\boxed{20}$

$$x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$$

$t = 0$ වන විට $x = 0$ වේ. 5

$0 = \frac{l}{3} + \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{-l}{3}$ 5

$\dot{x} = -\alpha\omega\sin\omega t + \beta\omega\cos\omega t$ 5

$t = 0$ වන විට $\dot{x} = \sqrt{gl}$ වේ.

$\sqrt{gl} = \beta\omega$ 5

$\ddot{x} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$ 5

$\frac{-3g\left(x - \frac{l}{3}\right)}{l} = -\alpha\omega^2\cos\omega t - \beta\omega^2\sin\omega t$ 5

$\frac{-3g}{l}(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t) = -\omega^2(\alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t)$ 5

$\therefore\ \omega^2 = \frac{3g}{l}$

එබැවින්, $\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}}$ 5 සහ $\beta = \sqrt{gl}\sqrt{\frac{l}{3g}} = \frac{l}{\sqrt{3}}$ 5

$\boxed{45}$

Maths අපි .com

දැන් $x = \frac{l}{3} + \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ නිසා

$x - \frac{l}{3} = \alpha\cos\omega t + \beta\sin\omega t$ 5

සරල අනුවර්තී චලිතයේ කේන්ද්‍රය $x - \frac{l}{3} = 0$ මගින් දෙනු ලබයි. 5

$\therefore\ x = \frac{l}{3}$

එබැවින් කේන්ද්‍රය C යන්න A සිට $\frac{l}{3}$ දුරක් පහළින් පිහිටයි.

10

විස්තාරය $= BC$

$t = t_1$ විට $\dot{x} = 0$ බැවින්, $-\alpha\omega\sin\omega t_1 + \beta\omega\cos\omega t_1 = 0$ 5

5

$\Rightarrow \frac{l}{3}\sin\omega t_1 = -\frac{l}{\sqrt{3}}\cos\omega t_1$

$\tan\omega t_1 = -\sqrt{3}$

$\omega t_1 = \frac{2\pi}{3}$ 5

$t = t_1$ විට x සෙවීම :

$x = \frac{l}{3} - \frac{l}{3}\cos\omega t_1 + \frac{l}{\sqrt{3}}\sin\omega t_1$ 5

$= \frac{l}{3} - \frac{l}{3}\cos\frac{2\pi}{3} + \frac{l}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi}{3}$

$= \frac{l}{3} + \frac{l}{6} + \frac{l}{2}$

$= l$ 5

$\therefore\ BC = l - \frac{l}{3} = \frac{2l}{3}$ 5

30

ප්‍රථම වරට A වෙත ළඟාවීමට ගත් කාලය t_o යැයි ගනිමු.

$s = ut + \frac{1}{2}at^2 \downarrow$ යෙදීමෙන්,

$u = 0,\ a = g,\ s = \frac{l}{2},\ t = t_o$

$\frac{l}{2} = \frac{1}{2}gt_o^{\,2}$ 5

$t_o = \sqrt{\frac{l}{g}}$ 5

B වෙත ළඟාවීමට මුළු කාලය $= \sqrt{\dfrac{l}{g}} + \dfrac{2\pi}{3\omega}$ 5

$= \sqrt{\dfrac{l}{g}} + \dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{l}{3g}}$

$= \sqrt{\dfrac{l}{g}}\left(1 + \dfrac{2\pi}{3\sqrt{3}}\right)$ 5

$\boxed{20}$

අංශුව B හි ඇති විට ආතතිය $= \dfrac{3mg}{l}(AB)$ 5

$= \dfrac{3mg}{l}(l)$

$= 3mg$ 5

$\boxed{10}$

---

14 වන ප්‍රශ්නය

14.(*a*) $OABC$ යනු චතුරස්‍රයක් යැයි ද D හා E යනු පිළිවෙළින් OB හා AC විකර්ණවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ද ගනිමු. තව ද, DE හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය F යැයි ගනිමු. O අනුබද්ධයෙන් A, B හා C ලක්ෂ්‍යවල පිහිටුම් දෛශික පිළිවෙළින් $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ යැයි $\mathbf{c}$ ගනිමින්, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ බව පෙන්වන්න.

P හා Q යනු පිළිවෙළින් OA හා BC පැතිවල මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය යැයි ගනිමු. P, F හා Q ලක්ෂ්‍ය ඒක රේඛීය බව පෙන්වා $PF : FQ$ අනුපාතය සොයන්න.

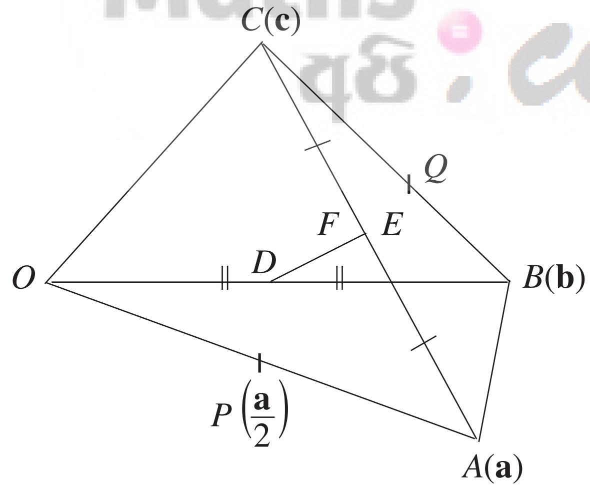
(*b*) $ABCD$ යනු, පැත්තක දිග $2l$ හා $BD = 2l$ වූ රොම්බසයක් යැයි ගනිමු. රොම්බසයේ විකර්ණ O ලක්ෂ්‍යයෙහිදී හමුවේ. විශාලත්ව නිව්ටන $2P$, $6P$, $4P$, $8P$ හා $6P$ වූ බල පිළිවෙළින් AB, BC, DC, DA හා BD දිගේ, අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. $\overrightarrow{OC}$ හා $\overrightarrow{OD}$ දිශාවලට බල පද්ධතිය විභේදනය කර, සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාව BC ට සමාන්තර වන බව පෙන්වන්න.

පද්ධතියේ O වටා ඝූර්ණය සොයන්න.

සම්ප්‍රයුක්තයේ ක්‍රියා රේඛාවට E ලක්ෂ්‍යයේදී දික් කරන ලද AB හමු වේ නම්, $BE = 2l$ බව පෙන්වන්න.
දැන්, නිව්ටන αP, βP, γP හා αP විශාලත්ව සහිත අතිරේක බල පිළිවෙළින් EB, CE, CA හා DC දිගේ අක්ෂර අනුපිළිවෙළින් දැක්වෙන දිශාවලට ක්‍රියා කරයි. මුළු පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ ඇත්නම් α, β හා γ හි අගයන් සොයන්න.

Maths අපි.com

(*a*)



$$\overrightarrow{OD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} = \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) \quad 5$$

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \quad 5$$

$$= \mathbf{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

$$= \mathbf{a} + \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

$$= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} \quad 5$$

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{DF} \qquad 5$$

$$= \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{DE}$$

$$= \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) + \frac{1}{2}(\mathbf{e} - \mathbf{d})$$

$$= \left(\frac{\mathbf{b}}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{a} + \mathbf{c}}{2} - \frac{\mathbf{b}}{2}\right)$$

$$= \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4} \qquad 5$$

25

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \qquad 5$$

$$= \mathbf{b} + \frac{1}{2}(\mathbf{c} - \mathbf{b})$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c}) \qquad 5$$

$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OF}$$

$$= -\frac{\mathbf{a}}{2} + \frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4}$$

$$= \frac{-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4} \qquad 5$$

$$\overrightarrow{FQ} = \overrightarrow{FO} + \overrightarrow{OQ}$$

$$= \frac{-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4} + \frac{1}{2}(\mathbf{b} + \mathbf{c})$$

$$= \frac{-\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{4} \qquad 5$$

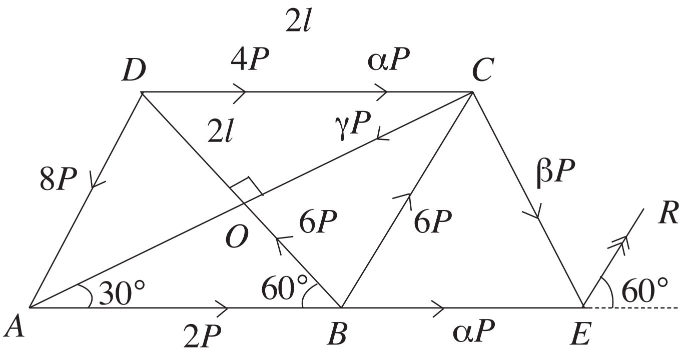
$$\overrightarrow{PF} = \overrightarrow{FQ} \qquad 5$$

$\Rightarrow$ P, F හා Q ඒක රේඛීය වේ. 5

තවද $PF : FQ = 1 : 1$ 5

35

(*b*)



(5)

$\overrightarrow{OC}$:

$X = 2P\cos 30^\circ + 6P\cos 30^\circ + 4P\cos 30^\circ - 8P\cos 30^\circ$ (5)

$= 2P.\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - 3 + 2 + 4)$

$= 2\sqrt{3}P$ (5)

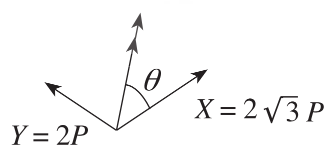
$\overrightarrow{OD}$:

$Y = 6P - 2P\cos 60^\circ + 6P\cos 60^\circ - 4P\cos 60^\circ - 8P\cos 60^\circ$ (5)

$= 6P - 2P.\frac{1}{2}(1 - 3 + 2 + 4)$

$= 6P - 4P$

$= 2P$ (5)



$\tan\theta = \frac{Y}{X} = \frac{2P}{2\sqrt{3}P} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow \theta = 30^\circ$ (5)

∴ සම්ප්‍රයුක්තය BC ට සමාන්තර වේ. (5)

35

O ↺ සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$M_0 = 2P.l\cos 30^\circ + 6P.l\cos 30^\circ - 4Pl\cos 30^\circ + 8Pl\cos 30^\circ$ (5)

$= 2Pl\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + 3 - 2 + 4)$

$= 6\sqrt{3}Pl$ (5)

10

Maths අපි.com

$$R^2 = X^2 + Y^2 = \left(2\sqrt{3}P\right)^2 + (2P)^2$$

$$= 12P^2 + 4P^2$$

$$= 16P^2 \quad 5$$

$$R = 4P$$

O සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$6\sqrt{3}Pl = 4P(l\cos 30^\circ + x\cos 30^\circ)$, මෙහි $x = BE$ වේ. 5

$$6\sqrt{3}Pl = 4P\frac{\sqrt{3}}{2}(l + x)$$

$$3l = l + x$$

$$x = 2l \quad 5$$

15

සමතුලිතතාව සඳහා,

$\overrightarrow{OC}$ දිගේ විභේදනයෙන්

$$2\sqrt{3}P - \gamma P = 0 \quad 5$$

$$\gamma = 2\sqrt{3} \quad 5$$

$\overrightarrow{OD}$ දිගේ විභේදනයෙන්

$$2P - \beta P = 0 \quad 5$$

$$\beta = 2 \quad 5$$

E සූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$\alpha P2l\cos 30^\circ - \gamma P2l = 0 \quad 5$$

$$\alpha\sqrt{3} = \gamma.2$$

$$\alpha = 2\,\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 4 \quad 5$$

30

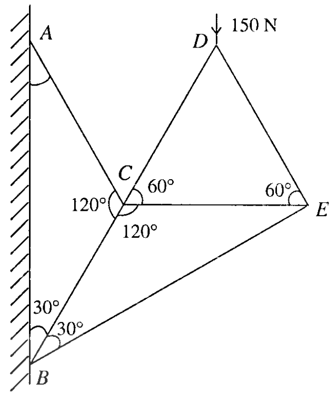
Maths අපි.com

15 වන ප්‍රශ්නය

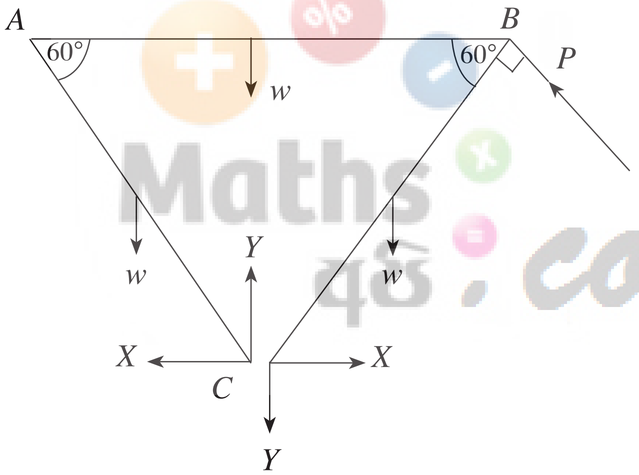
15. (*a*) එක එකක දිග $2a$ හා බර w වූ AB, BC හා CA ඒකාකාර දඬු තුනක් ABC සමපාද ත්‍රිකෝණයක් සෑදෙන පරිදි ඒවායේ කෙළවරවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කර ඇත. A ශීර්ෂය අචල ලක්ෂ්‍යයකට සුමට ලෙස අසවි කර ඇත්තේ ත්‍රිකෝණයට සිරස් තලයක නිදහසේ භ්‍රමණය වීමට හැකිවන පරිදි ය. ත්‍රිකෝණයේ තලයෙහි BC ට ලම්බව B හිදී යෙදූ P බලයකින් ත්‍රිකෝණය, AB තිරස්ව හා AB ට පහළින් C තිබෙන පරිදි, අල්ලා තබා ඇත. P හි අගය සොයන්න.

C හි දී AC මගින් BC මත යෙදෙන බලයේ තිරස් හා සිරස් සංරචකත් සොයන්න.

(*b*) යාබද රූප සටහනින් අන්තවලදී සුමට ලෙස සන්ධි කරන ලද සැහැල්ලු දඬු හයකින් සමන්විත රාමු සැකිල්ලක් නිරූපණය වේ. එය සිරස් බිත්තියකට A හා B හිදී සුමටව අසවි කර ඇති අතර, D හිදී 150 N භාරයක් දරයි. බෝ අංකනය යෙදීමෙන් ප්‍රත්‍යාබල සටහනක් ඇඳ, **ඒ නයින්,** දඬුවල ප්‍රත්‍යාබල, ආතති හෝ තෙරපුම් වශයෙන් දක්වමින්, නිර්ණය කරන්න.



(*a*)



පද්ධතියට A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන්,

$$W(a\cos 60^0 + a + (2a - a\cos 60^0)) = P.\,2a\cos 60^0 \quad (15)$$

$$W\left(\frac{a}{2} + a + 2a - \frac{a}{2}\right) = 2a.\frac{1}{2}P \quad (10)$$

$$P = 3W \quad (5)$$

30

$A,\quad Ya - Xa\sqrt{3} = W.\frac{a}{2}$ (10)

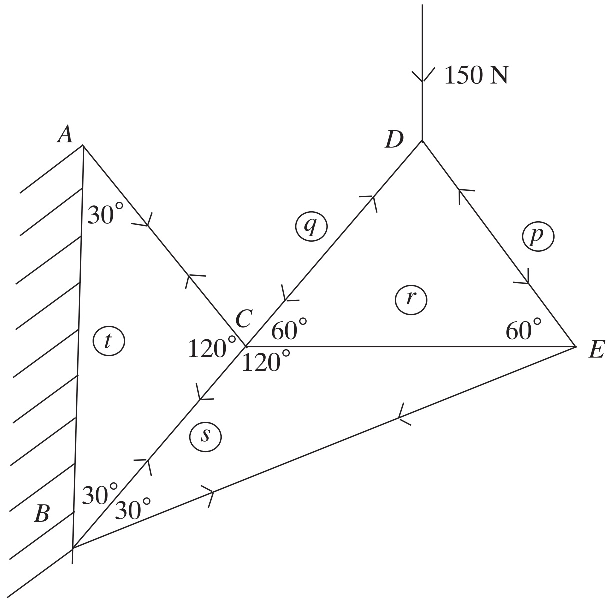
$B,\quad Ya + Xa\sqrt{3} = -W.\frac{a}{2}$ (10)

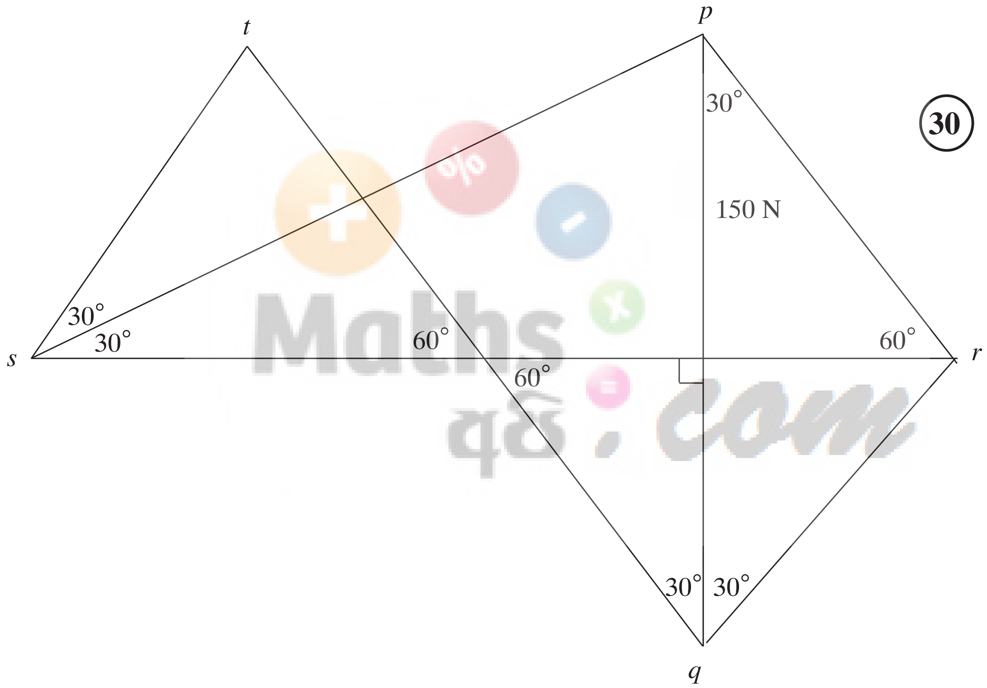
$\Rightarrow\quad Y = 0$ (5)

$\therefore X = -\frac{W}{2\sqrt{3}}$ (5)

30

(b)





30

30

දණ්ඩ	තෙරපුම	ආතතිය	විශාලත්වය
AC	–	√	$100\sqrt{3}$ N
CD	√	–	$50\sqrt{3}$ N
DE	√	–	$50\sqrt{3}$ N
CE	–	√	$100\sqrt{3}$ N
BC	–	√	$50\sqrt{3}$ N
BE	√	–	$150\sqrt{3}$ N

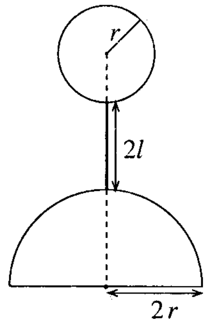
60

60

---

16 වන ප්‍රශ්නය

16. අරය a වූ ඒකාකාර ඝන අර්ධ ගෝලයක ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, එහි සමමිති අක්ෂය මත, ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{3a}{8}$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

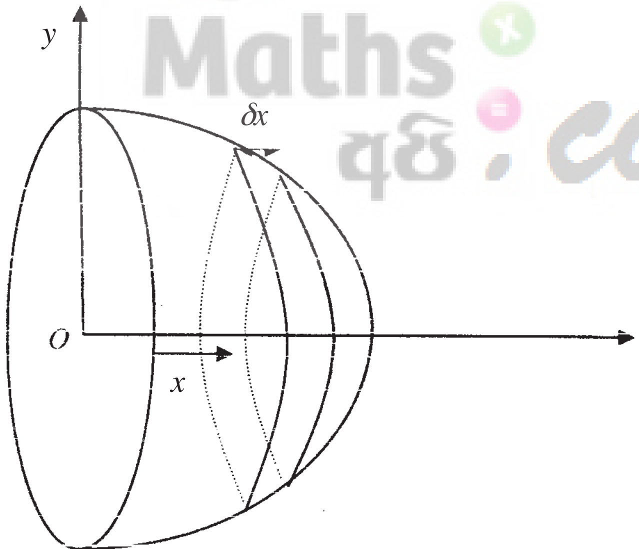


එකම ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සැදි ඝන අර්ධ ගෝලයක් හා ඝන ගෝලයක්, දිග $2l$ සහ ස්කන්ධය m වූ ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවරට රූපයේ දැක්වෙන ආකාරයට අර්ධ ගෝලයේ සමමිති අක්ෂය, දණ්ඩ හා ගෝලයේ කේන්ද්‍රය එකම සරල රේඛාවක් මත පිහිටන පරිදි දෘඪ ලෙස සවි කිරීමෙන්, සංයුක්ත වස්තුවක් සාදා ඇත. ගෝලයේ අරය r ද, ස්කන්ධය m ද වන අතර අර්ධ ගෝලයේ අරය $2r$ වේ. සංයුක්ත වස්තුවේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය, අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයේ සිට $\frac{1}{6}(8r + 3l)$ දුරකින් පිහිටන බව පෙන්වන්න.

මෙම සංයුක්ත වස්තුව තිරසට θ කෝණයකින් ආනත අචල තලයක් මත, අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකය තලය ස්පර්ශ කරමින් තබා ඇත. ලිස්සා යාම වැළැක්වීමට ප්‍රමාණවත් තරම් තලය රළු යැයි උපකල්පනය කරමින්, $\tan\theta < \frac{12r}{8r + 3l}$ නම්, සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙන බව පෙන්වන්න.

$l = \frac{4r}{3}$ හා $\theta = \frac{\pi}{6}$ නම්, සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙන බව පෙන්වා සංයුක්ත වස්තුව මත ආනත තලය මගින් යෙදෙන අභිලම්බ ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය සොයන්න.

Maths අපි .com



සමමිතියෙන්, අර්ධ ගෝලයේ ස්කන්ධ කේන්ද්‍රය සමමිති අක්ෂය මත පිහිටයි. **10**

O සිට x දුරින් වූ δx ඝනකමකින් යුත් අංශුමාත්‍රීය තැටිය සලකමු.

O සිට ස්කන්ධ කේන්ද්‍රයට දුර $\overline{X}$ යැයි ගනිමු.

ද්‍රව්‍යයේ ඝනත්වය ρ යැයි ගනිමු.

δx ඝනකමකින් යුත් අංශුමාත්‍රීය තැටියේ ස්කන්ධය $\approx \pi(a^2 - x^2)\,\delta x \rho$

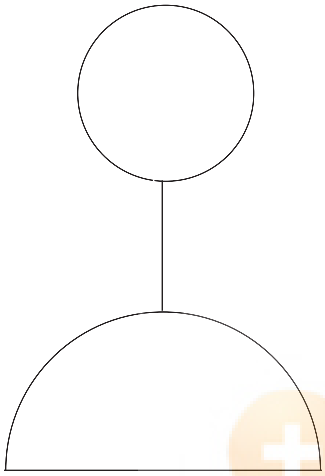
10

$$\overline{X} = \frac{\int_0^a \pi(a^2-x^2)x\rho\,dx}{\int_0^a \pi(a^2-x^2)\rho\,dx} = \frac{\left[\frac{a^2x^2}{2}-\frac{x^4}{4}\right]_0^a}{\frac{2}{3}a^3}$$

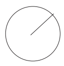
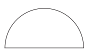
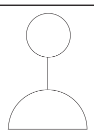
10 05

$$= \frac{3}{8}a$$ 05

40



සමමිතියෙන්, සංයුක්ත වස්තුවෙහි ස්කන්ධය කේන්ද්‍රය සමමිති අක්ෂය මත පිහිටයි. 05

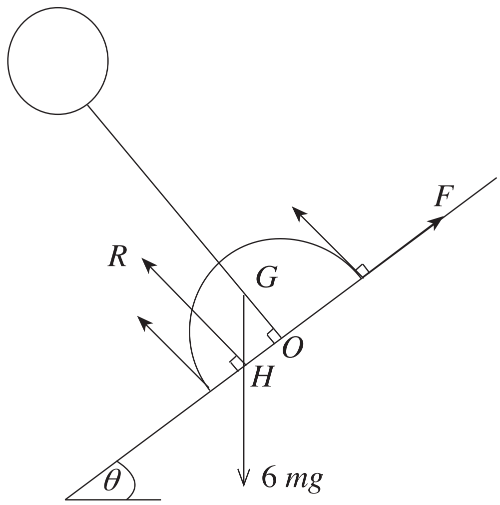
වස්තුව	ස්කන්ධය	කේන්ද්‍රයට **O** සිට දුර
	$m = \frac{4}{3}\pi r^3\rho$ 05	$3r + 2l$ 05
 r ⟶	$\frac{2}{3}\pi\ (2r)^3\rho\ =\ \frac{2}{3}\pi 8r^3\rho\ =\ 4m$ 05	$\frac{3}{8}(2r)\ =\ \frac{3r}{4}$ 05
	m 05	$2r + l$ 05
	$6m$ 05	$\overline{Y}$

$$6m\bar{Y} = m(3r+2l) + 4m\left(\frac{3r}{4}\right) + m(2r+l)$$ 10

$$6\bar{Y} = 8r + 3l$$ 05

$$\bar{Y} = \frac{1}{6}(8r+3l)$$

55



$OG = \frac{1}{6}(8r + 3l)$

$OH < 2r$ නම් සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙයි. 10

එනම් $OG \tan\theta < 2r$ 05

$\tan\theta < \frac{2r\times 6}{8r+3l} = \frac{12r}{8r+3l}$ 05

20

$l = \frac{4r}{3},\ \theta = \frac{\pi}{6}$

$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ 05

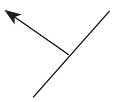
$\frac{12r}{8r+3l} = \frac{12r}{8r+3.\frac{4r}{3}} = \frac{12r}{12r} = 1$ 05

$\tan\theta = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} < 1$ 05

$\tan\theta < \frac{12r}{8r+3l}$

$\therefore$ සංයුක්ත වස්තුව නොපෙරළෙයි. 05

20



විභේදනයෙන්,

$R - 6mg\cos 30^\circ = 0$ 10 $\therefore\ R = 3\sqrt{3}\,mg$ 05

15

Maths අපි .com

17 වන ප්‍රශ්නය

17. (*a*) පාසලක එක්තරා විභාගයකට පෙනී සිටි සිසුන් 100 දෙනකු පිළිබඳ සමීක්ෂණයකට අනුව, එම සිසුන්ගෙන් 48 දෙනකු විභාගය සමත් වී ඇති බව අනාවරණය විය. තව ද මෙම සිසුන් 100 දෙනා අතුරෙන් 50 දෙනකු පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වී ඇති බව ද 30 දෙනකු පාසලේ දී සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි වී ඇති බව ද කිසිම සිසුවකු ක්‍රීඩා කටයුතු හා සංගීත කටයුතු යන දෙකට ම සහභාගි වී නොමැති බව ද අනාවරණය විය. තව ද, පාසලේ දී ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ සිසුන්ගෙන් 60% ක් විභාගය සමත් වී ඇති අතර පාසලේදී ක්‍රීඩා කටයුතු හෝ සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි නොවූ සිසුන්ගෙන් 30%ක් විභාගය සමත් වී ඇත.

ඉහත සිසුන් 100 දෙනාගෙන් එක් සිසුවකු සසම්භාවී ව තෝරා ගනු ලැබේ. මෙම සිසුවා

(i) පාසලේදී සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ අයකු බව දී ඇති විට, ඔහු විභාගය සමත් අයකු වීමේ,

(ii) විභාගය සමත් වූ අයකු බව දී ඇති විට, පාසලේදී ඔහු ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වූ අයකු වීමේ

සම්භාවිතාව සොයන්න.

(*b*) කුඩා ලෝහ බෝල 50 කින් සමන්විත කුලකයක විෂ්කම්භවල සංඛ්‍යාත ව්‍යාප්තියක් පහත දැක්වෙන වගුවේ දී ඇත.

විෂ්කම්භය (cm)	කුඩා බෝල සංඛ්‍යාව
0.80 – 0.81	1
0.81 – 0.82	3
0.82 – 0.83	9
0.83 – 0.84	20
0.84 – 0.85	14
0.85 – 0.86	2
0.86 – 0.87	1

විෂ්කම්භවල ව්‍යාප්තියේ පළමුවන චතුර්ථකය ගණනය කරන්න.

මෙම ලෝහ බෝල 50 කින් සමන්විත කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය හා සම්මත අපගමනය 0.835 cm හා 0.01 cm බව දී ඇත. කුඩා ලෝහ බෝල 100 ක තවත් කුලකයක් සඳහා විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය පළමුවන ලෝහ බෝල 50 හි කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය ම බව ද සම්මත අපගමනය 0.015 cm බව ද දී ඇත.

ලෝහ බෝල 150 හි සංයුක්ත කුලකයේ විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය හා විචලතාව සොයන්න.

දෙවන ලෝහ බෝල 100 ක කුලකය සඳහා මිනුම් ගැනීමේදී භාවිත කරනු ලැබූ උපකරණය දෝෂ සහිත බව ද එමගින් එක් එක් බෝලයක විෂ්කම්භය 0.015 cm ප්‍රමාණයකින් අවතක්සේරු වී ඇති බව ද පසුව සොයා ගනු ලැබිණ. මෙම ලෝහ බෝල 100 හි විෂ්කම්භවල සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය හා සත්‍ය සම්මත අපගමනය සොයන්න.

(*a*) S, M, N හා X පහත දැක්වෙන පරිදි අර්ථ දක්වා ඇත.

S : ක්‍රීඩා කටයුතු සඳහා සහභාගි වීම

M : සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි වීම

N : ක්‍රීඩා හෝ සංගීත කටයුතු සඳහා සහභාගි නොවීම

X : විභාගය සමත් වීම

10

එවිට, $\underbrace{\mathrm{P}(S) = \frac{50}{100}, \mathrm{P}(M) = \frac{30}{100}, \mathrm{P}(N) = \frac{20}{100}}_{10}, \mathrm{P}(X) = \frac{48}{100}$ 05

05 $\mathrm{P}(X \setminus S) = 0.60, \mathrm{P}(X \setminus N) = 0.30$ 05

(i) මුළු සම්භාවිතා ප්‍රමේයයෙන්,

$\mathrm{P}(X) = \mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(X \setminus S) + \mathrm{P}(M)\,\mathrm{P}(X \setminus M) + \mathrm{P}(N)\,\mathrm{P}(X \setminus N)$ 10

$\frac{48}{100} = \frac{50}{100} \times 0.6 + \frac{30}{100} \times \mathrm{P}(X \setminus M) + \frac{20}{100} \times 0.3$ 05

$\mathrm{P}(X \setminus M) = \frac{48 - 30 - 6}{30} = \frac{12}{30} = \frac{2}{5}$ 10

(ii) බේයි ප්‍රමේයයෙන්, $\mathrm{P}(S \setminus X) = \frac{\mathrm{P}(S)\,\mathrm{P}(X \setminus S)}{\mathrm{P}(X)} = \frac{50 \times 0.6}{48} = \frac{30}{48} = \frac{5}{8}$

10 05

75

(*b*) පළමුවන චතුර්ථකය $= \frac{50}{4}$ වන නිරීක්ෂණයේ අගය $= 12.5$ වන නිරීක්ෂණයේ අගය

$\therefore$ පළමුවන චතුර්ථකය පිහිටන පන්ති ප්‍රාන්තරය $(0.82 - 0.83)$ 10

$\therefore$ පළමුවන චතුර්ථකය $= 0.82 + \frac{(12.5 - 4)}{9} \times 0.01$ 10

$= 0.82 + 0.009$

$= 0.829$ 05

25

බෝල 50 හි විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය $= 0.835$

බෝල 100 හි විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය $= 0.835$ 10

$\therefore$ බෝල 150 හි විෂ්කම්භවල මධ්‍යන්‍යය $= 0.835$

$\boxed{10}$

බෝල 50 හි විෂ්කම්භවල විචලතාව, $S_1^2 = 0.01^2 = 0.0001$

බෝල 100 හි විෂ්කම්භවල විචලතාව, $S_2^2 = 0.015^2 = 0.000225$

බෝල 150 හි විෂ්කම්භවල සංයුක්ත කුලකයේ විචලතාව,

$$S^2 = \frac{n_1 S_1^2 + n_2 S_2^2}{n_1 + n_2} \quad 10$$

$$= \frac{50 \times 0.0001 + 100 \times 0.000225}{150}$$

$$= \frac{0.0050 + 0.0225}{150} \quad 05$$

$$= 0.00018$$

$\boxed{15}$

---

y යනු බෝල 100 හි විෂ්කම්භවල නිවැරදි අගය යැයි ගනිමු.

එවිට, $y = x + 0.015$; මෙහි x මුල් අගය වේ. 05

05 $\therefore \bar{y} = \bar{x} + 0.015$ හා සත්‍ය සම්මත අපගමනය = මුල් සම්මත අපගමනය 05

$\therefore$ සත්‍ය මධ්‍යන්‍යය $= 0.835 + 0.015 = 0.85$ හා සත්‍ය සම්මත අපගමනය $= 0.015$ 05

05

$\boxed{25}$

III කොටස

3.0 පිළිතුරු සැපයීමේ දී සැලකිලිමත් විය යුතු කරුණු හා යෝජනා :

3.1. පිළිතුරු සැපයීමේ දී සැලකිලිමත් විය යුතු කරුණු :

පොදු උපදෙස් :

- ප්‍රශ්න පත්‍රයේ ඇති මූලික උපදෙස් කියවා හොඳින් තේරුම් ගත යුතුය. එනම් එක් එක් කොටසින් කොපමණ ප්‍රශ්න සංඛ්‍යාවකට පිළිතුරු සැපයිය යුතු ද කුමන ප්‍රශ්න අනිවාර්ය වේ ද කොපමණ ලකුණු ලැබේ ද කොපමණ කාලයක් ලැබේ ද යන කරුණු පිළිබඳව සැලකිලිමත් විය යුතු අතර, ප්‍රශ්න හොඳින් කියවා පිළිතුරු ඉදිරිපත් කිරීමට බලාපොරොත්තු වන ප්‍රශ්න පිළිබඳව නිරවුල් අවබෝධයක් ඇති කර ගෙන පිළිතුරු ලිවිය යුතුය.
- I පත්‍රයේත් II පත්‍රයේත් A කොටසෙහි සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.
- I පත්‍රයේත් II පත්‍රයේත් B කොටසෙහි ප්‍රශ්න 07න් තෝරා ගත් ප්‍රශ්න 05කට පිළිතුරු සැපයිය යුතුය.
- සෑම ප්‍රධාන ප්‍රශ්නයක්ම අලුත් පිටුවකින් ආරම්භ කළ යුතුය.
- අයදුම්කරුගේ විභාග අංකය සෑම පිටුවකම අදාළ ස්ථානයේ ලිවිය යුතුය.
- ප්‍රශ්න අංක හා අනුකොටස් අංක නිවැරදිව ලිවිය යුතුය.
- සියලුම ප්‍රශ්න හොඳින් කියවා පිළිතුරු ලිවිය යුතුය. ප්‍රශ්න යටතේ දී ඇති තොරතුරුත්, ලබා ගත යුතු පිළිතුරු හෝ සාධනය කළ යුතු ප්‍රතිඵල කවරේ ද යන්නත් පැහැදිලිව අවබෝධ කර ගත යුතුය.
- ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සැපයීමේදී දී ඇති කාලය නිසි පරිදි කළමනාකරණය කර ගැනීමට වග බලා ගත යුතුය.
- පැහැදිලි අත් අකුරින් පිළිතුරු සැපයිය යුතුය. පිළිතුරු ලිවීමේදී නිල් පාට හෝ කළු පාට පෑන් පමණක් භාවිත කළ යුතුය. අනෙකුත් පාට පෑන් භාවිත කිරීමෙන් වැළකිය යුතුය.

විශේෂ උපදෙස් :

- රූප සටහන් ඇඳිය යුතු අවස්ථාවලදී ඒවා ඉතා පැහැදිලිව ඇඳ නම් කළ යුතුය. මෙහිදී රේඛාවල දිග හා කෝණවල විශාලත්ව සන්සන්දනාත්මකව නිවැරදි රූපය හා අනුරූප වන සේ දැක්වීම අවශ්‍ය වේ. රූපසටහන්වල නිරවද්‍යතාව, සම්බන්ධතා දැකීමටත් ඒ ඇසුරින් පහසුවෙන් පිළිතුරු කරා එළඹීමටත් මහෝපකාරී වෙයි. රූප සටහන්වල තොරතුරු ඇතුළත් කිරීමේදී ද නිරවද්‍යතාව කෙරෙහි වැඩි අවධානයක් යොමු කිරීම අත්‍යවශ්‍ය වේ. (නිදසුන : බල ලකුණු කිරීම)
- ගණනය කිරීම්වලදී එක් එක් පියවර පැහැදිලිව සඳහන් කළ යුතු අතර, අවශ්‍ය ස්ථානවලදී පියවර අතර සම්බන්ධය දැක්වෙන සමාන ලකුණු හෝ වෙනත් අදාළ සංකේත හෝ ලියා දැක්වීමට සැලකිලිමත් විය යුතුය. එක් පියවරක හෝ පිටුවක හෝ ඇති ප්‍රකාශන හා සමීකරණ ඊළඟ පියවරට හෝ පිටුවට පිටපත් කිරීමේදී ඒවායේ නිරවද්‍යතාව පිළිබඳව ඉතා සැලකිලිමත් විය යුතුය.
- අවශ්‍ය ස්ථානවලදී නිවැරදිව ඒකක භාවිත කළ යුතුය.

* ප්‍රස්තාර ඇඳීමේදී X හා Y අක්ෂ නිවැරදිව නම් කර පරිමාණගත කළ යුතු අතර, අවශ්‍ය අවස්ථාවල ඒකක ද සඳහන් කළ යුතුය.

* මූලික සමානුපාත පිළිබඳ සංකල්ප නැවත පරිශීලනය කළ යුතුය.

* මූලික ජ්‍යාමිතිය පිළිබඳ දැනුම සහ අවබෝධය ඉතා වැදගත් වේ.

  නිදසුන්: (1) සමාන්තරාස්‍රයක ලක්ෂණ
  (2) රොම්බසයක ලක්ෂණ
  (3) සවිධි ෂඩස්‍රයක / බහු අස්‍රයක ලක්ෂණ
  (4) ත්‍රිකෝණ ආශ්‍රිත විවිධ ප්‍රමේය
  (5) සමරූපී ත්‍රිකෝණ
  (6) වෘත්ත ආශ්‍රිත ප්‍රමේය
  (7) සමමිති ගුණ

* සාධකවලට බිඳිය හැකි වර්ගජ ප්‍රකාශන එකවරම සාධකවලට වෙන්කර ගැනීමේ හැකියාව ප්‍රගුණ කළ යුතුය.

* දෛශික නිරූපණයේදී නිවැරදි සංකේත භාවිත කිරීමට සැලකිලිමත් විය යුතුය.

* "එනයින් ලබා ගන්න", "අපෝහනය කරන්න", "සත්‍යාපනය කරන්න", "ව්‍යුත්පන්න කරන්න" වැනි යෙදුම් කෙරෙහි සැලකිලිමත් විය යුතු අතර, ඒ අනුව පිළිතුර කරා එළඹීමට වග බලා ගත යුතුය. 'එනයින් හෝ අන් ක්‍රමයකින් හෝ' යනුවෙන් සඳහන් අවස්ථාවලදී බහුල වශයෙන්ම පෙර ලබා ගත් ප්‍රතිඵලය භාවිත කර ඊට පසු ප්‍රතිඵලය ලබා ගැනීම වඩාත් පහසු වේ.

* දී ඇති තොරතුරු භාවිතයෙන් නිගමනයකට එළඹිය යුතු අවස්ථාවලදී විලෝම ක්‍රියාවලිය ඉදිරිපත් කිරීම ලකුණු අහිමි වීමට හෝ අඩුවීමට හේතු වේ. එබැවින් ප්‍රශ්නය මගින් අපේක්ෂිත ආකාරයට පිළිතුර ඉදිරිපත් කළ යුතුය. එහෙත් "නම් ම පමණක්" හෝ "ම නම් පමණක්" සත්‍ය බව සාධනය කළ යුතු අවස්ථාවලදී විලෝම වශයෙන් ද ප්‍රතිඵලය ලැබෙන බව සනාථ වන පරිදි පිළිතුරු ඉදිරිපත් කළ යුතු වේ.

* සෑම විටෙකදීම අවසාන පිළිතුර සරලම ආකාරයෙන් දැක්වීමට අවධානය යොමු කළ යුතුය. අවසාන පිළිතුර, ප්‍රශ්නයෙහි අසා ඇති ආකාරය අනුව පැහැදිලිව දැක්විය යුතුය.

* අයදුම්කරුවන් තම ඉලක්කම්, සංකේත සහ අදහස් පැහැදිලිවත් නිවැරදිවත් ලියා දැක්වීමට අවධානය යොමු කළ යුතුය.

* පිළිතුර කරා එළඹීමට අවශ්‍ය සුළු කිරීම් (සංඛ්‍යාමය, වීජීය හෝ ත්‍රිකෝණමිතික) කටුවැඩ ලෙස සැලකුව ද පිළිතුර සමඟම පසෙකින් ඉදිරිපත් කරන්න.

* පිළිතුර සම්පූර්ණ කිරීමට නොහැකි අවස්ථාවලදී වුව ද ප්‍රශ්නයට පිළිතුර ලබා ගැනීමට අදාළ ඉදිරි පියවර ලියා දැක්වීම බොහෝවිට ඵලදායි විය හැකිය.

* ප්‍රශ්නයක අග කොටස්වල පවා මුල් කොටස්වලින් ස්වාධීන වූ පහසු කොටස් තිබිය හැකි බැවින් ප්‍රශ්නයක මුල් කොටස අපහසු වුව ද ප්‍රශ්නය අත්හැර නොයා ඉතිරි කොටස් පිළිබඳව ද අවධානය යොමු කිරීම වැදගත් වේ.

* සමහර විටෙක යම් අනුකොටසක් සාධනය නොකළ ද එම ප්‍රතිඵල අවශ්‍ය නම් යෙදීමෙන් ඉදිරි අනුකොටසක් සඳහා පිළිතුරු ඉදිරිපත් කළ හැකිය.